

応用数学 III 小テスト 1,2 時限

1. 水平面内を質量 m の質点が運動する. 質点の座標を (x, y) で表す. 質点の位置が放物線

$$R(x, y) \triangleq y - \sqrt{x^2 + (y - b)^2} - a = 0$$

(a, b は定数)

上に制約される. 以下の問いに答えよ. (8 点)

(1) $R(x, y)$ の一階偏微分 $R_x \triangleq \partial R / \partial x$, $R_y \triangleq \partial R / \partial y$ を求めよ.

(2) $R(x, y)$ の二階偏微分 $R_{xx} \triangleq \partial^2 R / \partial x^2$, $R_{xy} \triangleq \partial^2 R / \partial x \partial y$, $R_{yx} \triangleq \partial^2 R / \partial y \partial x$, $R_{yy} \triangleq \partial^2 R / \partial y^2$ を求めよ.

(3) 制約力の大きさを λ で表すと, 質点の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda R_x \\ m\ddot{y} = \lambda R_y \end{cases}$$

で表される. 運動方程式と制約安定化の式から $x, y, v_x \triangleq \dot{x}, v_y \triangleq \dot{y}$ に関する常微分方程式の標準形を導け. 導いた式が常微分方程式の標準形であることを示せ.

2. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -12 & -3 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \\ -12 & -6 & 24 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ. (8 点)

(1) 行列 A のコレスキー分解を求めよ.

(2) 行列 A をコレスキー分解した結果を用いて, 連立一次方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 7 \\ -24 \\ -17 \end{bmatrix}$$

を解け.

3. 時刻 t の関数 x の時間微分が, x と t の式で次のように表される.

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2 + 3 \sin t$$

このとき関数 x の二階時間微分 \ddot{x} を, x, \dot{x}, t の式で表せ. (4 点)

応用数学 III 小テスト 3,4 時限

1. 水平面内を質量 m の質点が運動する. 質点の座標を (x, y) で表す. 質点の位置が双曲線

$$R(x, y) \triangleq \sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - 2c = 0$$

$(a, b, c$ は正の定数. $-a < c < a$)

上に制約される. 以下の問いに答えよ. (8 点)

- (1) $R(x, y)$ の一階偏微分 $R_x \triangleq \partial R / \partial x$, $R_y \triangleq \partial R / \partial y$ を求めよ.
- (2) $R(x, y)$ の二階偏微分 $R_{xx} \triangleq \partial^2 R / \partial x^2$, $R_{xy} \triangleq \partial^2 R / \partial x \partial y$, $R_{yx} \triangleq \partial^2 R / \partial y \partial x$, $R_{yy} \triangleq \partial^2 R / \partial y^2$ を求めよ.
- (3) 制約力の大きさを λ で表すと, 質点の運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda R_x \\ m\ddot{y} = \lambda R_y \end{cases}$$

で表される. 運動方程式と制約安定化の式から $x, y, v_x \triangleq \dot{x}, v_y \triangleq \dot{y}$ に関する常微分方程式の標準形を導け. 導いた式が常微分方程式の標準形であることを示せ.

2. 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 26 & -8 & 4 \\ -4 & -8 & 9 & -3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

とする. 以下の問いに答えよ. (8 点)

- (1) 行列 A のコレスキー分解を求めよ.
- (2) 行列 A をコレスキー分解した結果を用いて, 連立一次方程式

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -16 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を解け.

3. 時刻 t の関数 x の時間微分が, x と t の式で次のように表される.

$$\dot{x} = -\sin x + 3t^2$$

このとき関数 x の二階時間微分 \ddot{x} を, x, \dot{x}, t の式で表せ. (4 点)