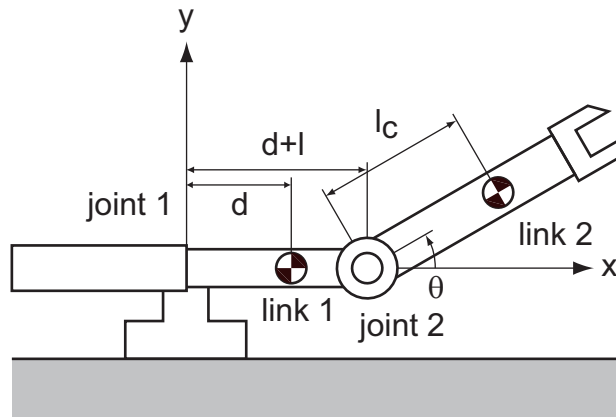


応用数学 III 小テスト 1,2 時限

1. 図に示すリンク機構が鉛直面内を運動する. 第1関節は並進関節, 第2関節は回転関節である. 時刻 t における第1関節の並進移動量を変数 d , 第2関節の回転角を変数 θ で表す. 第1関節が発生する力を f , 第2関節が発生するトルクを τ で表す. 第1リンクの重心と第2関節の距離を定数 l , 第2関節と第2リンクの重心の距離を定数 l_c で表す. このとき, 第1リンクの重心の座標は $(d, 0)$, 第2リンクの重心の座標は $(d+l+l_c C_\theta, l_c S_\theta)$ と表される. ただし $C_\theta = \cos \theta$, $S_\theta = \sin \theta$ である. リンク1の質量を m_1 , 重心まわりの慣性モーメントを I_1 で表す. リンク2の質量を m_2 , 重心まわりの慣性モーメントを I_2 で表す. 重力加速度 g が y 軸の負方向に作用する. 以下の問いに答えよ. (10点)

- (1) 第1リンクの重心の速度と第2リンクの重心の速度を $d, \theta, \dot{d}, \dot{\theta}$ の式で表せ.
- (2) 平面リンク機構の運動エネルギーを $d, \theta, \dot{d}, \dot{\theta}$ の式で表せ.
- (3) 平面リンク機構の重力ポテンシャルエネルギーと外力・トルクの成す仕事を求めよ.
- (4) 平面リンク機構の運動方程式を $d, \theta, \dot{d}, \dot{\theta}, \ddot{d}, \ddot{\theta}$ の式で表せ.
- (5) $v \triangleq \dot{d}$, $\omega \triangleq \dot{\theta}$ とする. 平面リンク機構の運動方程式から, d, θ, v, ω に関する常微分方程式の標準形を導け.



2. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して, 射影行列 $A(A^T A)^{-1} A^T$ を求めよ. (6点)

3. 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と四元数ベクトル $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ の時間微分 $\dot{\mathbf{q}}$ の関係は $\boldsymbol{\omega} = 2H\dot{\mathbf{q}}$ と表される。ここで行列 H は

$$H \triangleq \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。このとき

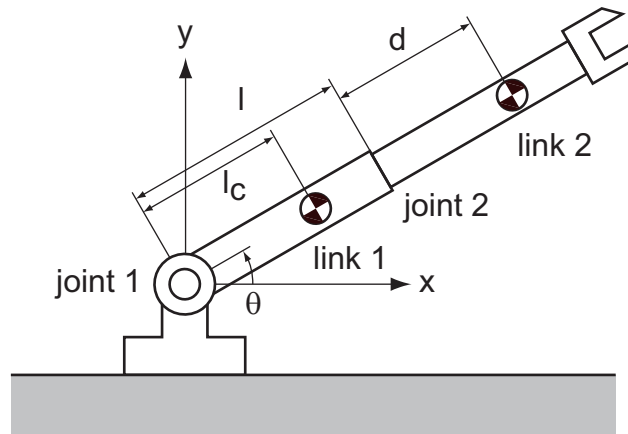
$$HH^T = I_{3 \times 3}$$

が成り立つことを示せ。(4点)

応用数学 III 小テスト 3,4 時限

1. 図に示すリンク機構が鉛直面内を運動する. 第1関節は回転関節, 第2関節は並進関節である. 時刻 t における第1関節の回転角を変数 θ , 第2関節の並進移動量を変数 d で表す. 第1関節が発生するトルクを τ , 第2関節が発生する力を f で表す. 第1リンクの長さを定数 l , 第1関節と第1リンクの重心の距離を定数 l_c で表す. このとき, 第1リンクの重心の座標は $(l_c C_\theta, l_c S_\theta)$, 第2リンクの重心の座標は $((l+d)C_\theta, (l+d)S_\theta)$ と表される. ただし $C_\theta = \cos \theta$, $S_\theta = \sin \theta$ である. リンク1の質量を m_1 , 重心まわりの慣性モーメントを I_1 で表す. リンク2の質量を m_2 , 重心まわりの慣性モーメントを I_2 で表す. 重力加速度 g が y 軸の負方向に作用する. 以下の問いに答えよ. (10点)

- (1) 第1リンクの重心の速度と第2リンクの重心の速度を $\theta, d, \dot{\theta}, \dot{d}$ の式で表せ.
- (2) 平面リンク機構の運動エネルギーを $\theta, d, \dot{\theta}, \dot{d}$ の式で表せ.
- (3) 平面リンク機構の重力ポテンシャルエネルギーと外力・トルクの成す仕事を求めよ.
- (4) 平面リンク機構の運動方程式を $\theta, d, \dot{\theta}, \dot{d}, \ddot{\theta}, \ddot{d}$ の式で表せ.
- (5) $\omega \triangleq \dot{\theta}$, $v \triangleq \dot{d}$ とする. 平面リンク機構の運動方程式から, θ, d, ω, v に関する常微分方程式の標準形を導け.



2. 行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して, 射影行列 $A(A^T A)^{-1} A^T$ を求めよ. (6点)

3. 角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と四元数ベクトル $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$ の時間微分 $\dot{\mathbf{q}}$ の関係は $\boldsymbol{\omega} = 2H\dot{\mathbf{q}}$ と表される。ここで行列 H は

$$H \triangleq \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

で与えられる。このとき

$$H\dot{\mathbf{q}} = -\dot{H}\mathbf{q}$$

が成り立つことを示せ。(4点)