

数值計算：有限要素法（二次元）

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

二次元/三次元変形

一次元変形

伸び歪み ε

ヤング率 E

歪みポテンシャルエネルギー密度 $\frac{1}{2}E\varepsilon^2$

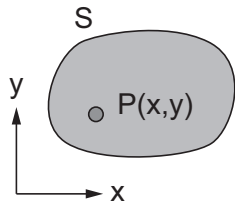
二次元/三次元変形

伸び歪み & せん断歪み \rightarrow 歪みベクトル ε

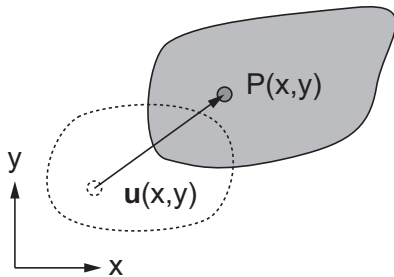
ラメの定数 $\lambda, \mu \rightarrow$ 弾性行列 $\lambda I_\lambda + \mu I_\mu$

歪みポテンシャルエネルギー密度 $\frac{1}{2}\varepsilon^\top(\lambda I_\lambda + \mu I_\mu)\varepsilon$

二次元変形



自然状態

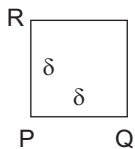


移動/変形状態

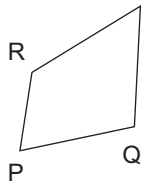
変位ベクトル

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

二次元変形

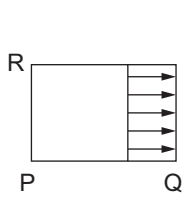


自然状態

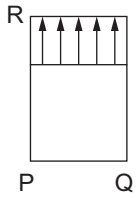


変形と回転

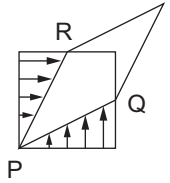
二次元変形



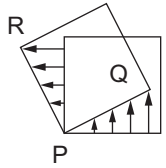
x 軸方向の伸び



y 軸方向の伸び



せん断変形



回転運動

二次元変形

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \text{ 軸方向の伸び}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \text{せん断} + \text{回転}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = y \text{ 軸方向の伸び}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \text{せん断} - \text{回転}$$

↓

コーシー歪み (Cauchy strain)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

二次元変形

歪みベクトル

$$\boldsymbol{\epsilon} \triangleq \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

二次元変形

歪みポテンシャルエネルギー密度

線形等方弾性材料

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \boldsymbol{\varepsilon}$$

λ と μ はラメの定数

$$I_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_\mu = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

二次元変形

体積要素

$$h dS = h dx dy$$

歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_S \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \boldsymbol{\epsilon} h dS$$

二次元変形

体積要素

$$h dS = h dx dy$$

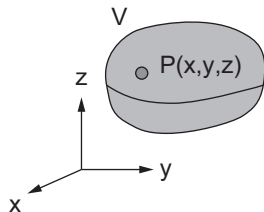
歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_S \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \boldsymbol{\varepsilon} h dS$$

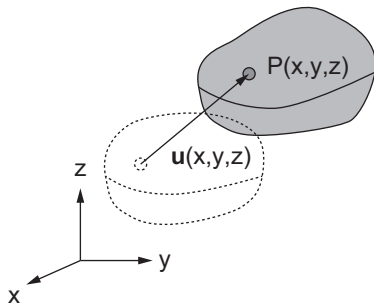
運動エネルギー

$$T = \int_S \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^\top \dot{\mathbf{u}} h dS$$

三次元変形



自然状態

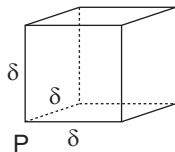


移動/変形状態

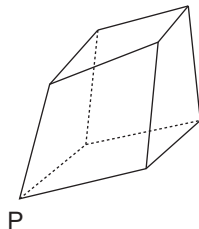
変位ベクトル

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$$

三次元変形



自然状態



変形と回転

三次元変形

	u	v	w
$\partial/\partial x$	伸び (x 軸)	せん断 + 回転 (xy)	せん断 - 回転 (zx)
$\partial/\partial y$	せん断 - 回転 (xy)	伸び (y 軸)	せん断 + 回転 (yz)
$\partial/\partial z$	せん断 + 回転 (zx)	せん断 - 回転 (yz)	伸び (z 軸)

$$2 \cdot yz \text{ 面内のせん断} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$2 \cdot zx \text{ 面内のせん断} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$2 \cdot xy \text{ 面内のせん断} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

三次元変形

コーシー歪み (Cauchy strain)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ 2\varepsilon_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

三次元変形

歪みベクトル

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

三次元変形

歪みポテンシャルエネルギー密度

線形等方弾性材料

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$I_\lambda = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ \hline & & & \end{array} \right], \quad I_\mu = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{array} \right]$$

三次元変形

体積要素

$$dV = dx dy dz$$

歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \boldsymbol{\epsilon} dV$$

三次元変形

体積要素

$$dV = dx dy dz$$

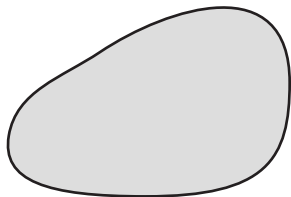
歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \boldsymbol{\epsilon} dV$$

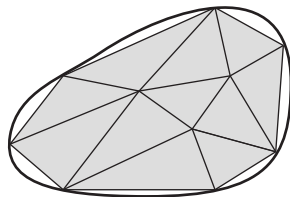
運動エネルギー

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV$$

二次元 FEM

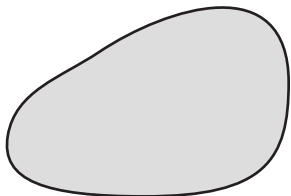


領域 S

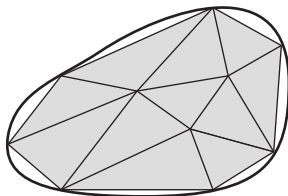


三角形による被覆

二次元 FEM



領域 S



三角形による被覆

$$\int_S dS \approx \sum_{\text{triangles}} \int_{\Delta P_i P_j P_k} dS$$

二次元 FEM

密度 ρ と厚さ h が一定と仮定

$\Delta = \Delta P_i P_j P_k$ の運動エネルギー

$$\begin{aligned} T_{i,j,k} &= \int_{\Delta} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} h dS \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i^T & \dot{\mathbf{u}}_j^T & \dot{\mathbf{u}}_k^T \end{bmatrix} \frac{\rho h \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_j \\ \dot{\mathbf{u}}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(参照 Chapter_2_Finite_Element_Approximation.pdf @

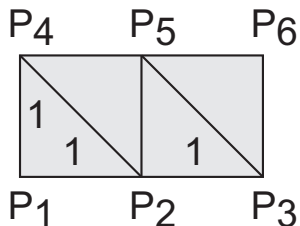
www.ritsumeai.ac.jp/~hirai/edu/common/soft_robotics/)

二次元 FEM

部分慣性行列

$$M_{i,j,k} = \frac{\rho h \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} \\ l_{2 \times 2} & 2l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} \\ l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} & 2l_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

例 (慣性行列)



$\rho h \Delta / 12$ が一定値 1 であると仮定
部分慣性行列

$$M_{1,2,4} = M_{2,3,5} = M_{5,4,2} = M_{6,5,3} = \begin{bmatrix} 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} \end{bmatrix} .$$

例（慣性行列）

全運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_N^T M \dot{\mathbf{u}}_N$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1^T & \dot{\mathbf{u}}_2^T & \cdots & \dot{\mathbf{u}}_6^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_6 \end{bmatrix}$$

M : 慣性行列（ 6×6 ブロック行列）

例 (慣性行列)

$$M_{1,2,4} = \left[\begin{array}{c|c|c} (1, 1) \text{ block} & (1, 2) \text{ block} & (1, 4) \text{ block} \\ \hline (2, 1) \text{ block} & (2, 2) \text{ block} & (2, 4) \text{ block} \\ \hline (4, 1) \text{ block} & (4, 2) \text{ block} & (4, 4) \text{ block} \end{array} \right]$$

$M_{1,2,4}$ の M への寄与

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 2l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} & & l_{2 \times 2} & & \\ \hline l_{2 \times 2} & 2l_{2 \times 2} & & l_{2 \times 2} & & \\ \hline & & & & & \\ \hline l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} & & 2l_{2 \times 2} & & \\ \hline & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right]$$

例 (慣性行列)

$$M_{2,3,5} = \left[\begin{array}{c|c|c} (2, 2) \text{ block} & (2, 3) \text{ block} & (2, 5) \text{ block} \\ \hline (3, 2) \text{ block} & (3, 3) \text{ block} & (3, 5) \text{ block} \\ \hline (5, 2) \text{ block} & (5, 3) \text{ block} & (5, 5) \text{ block} \end{array} \right]$$

$M_{2,3,5}$ の M への寄与

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & 2l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} & & l_{2 \times 2} \\ \hline & l_{2 \times 2} & 2l_{2 \times 2} & & l_{2 \times 2} \\ \hline & & & & \\ \hline & l_{2 \times 2} & l_{2 \times 2} & & 2l_{2 \times 2} \\ \hline & & & & \end{array} \right]$$

例 (慣性行列)

$$M_{5,4,2} = \left[\begin{array}{c|c|c} (5, 5) \text{ block} & (5, 4) \text{ block} & (5, 2) \text{ block} \\ \hline (4, 5) \text{ block} & (4, 4) \text{ block} & (4, 2) \text{ block} \\ \hline (2, 5) \text{ block} & (2, 4) \text{ block} & (2, 2) \text{ block} \end{array} \right]$$

$M_{5,4,2}$ の M への寄与

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & & \\ \hline & 2I_{2 \times 2} & & I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & \\ \hline & & & & & \\ \hline & I_{2 \times 2} & & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & \\ \hline & I_{2 \times 2} & & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & \\ \hline & & & & & \end{array} \right]$$

例 (慣性行列)

$$M_{6,5,3} = \left[\begin{array}{c|c|c} (6,6) \text{ block} & (6,5) \text{ block} & (6,3) \text{ block} \\ \hline (5,6) \text{ block} & (5,5) \text{ block} & (5,3) \text{ block} \\ \hline (3,6) \text{ block} & (3,5) \text{ block} & (3,3) \text{ block} \end{array} \right]$$

$M_{6,5,3}$ の M への寄与

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ \hline & & & & \\ \hline & & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} \\ \hline & & I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} \end{array} \right]$$

例 (慣性行列)

慣性行列

$$M = M_{1,2,4} \oplus M_{2,3,5} \oplus M_{5,4,2} \oplus M_{6,5,3}$$
$$= \begin{bmatrix} 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & & I_{2 \times 2} & & & \\ I_{2 \times 2} & 6I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & & \\ & I_{2 \times 2} & 4I_{2 \times 2} & & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & \\ I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & & 4I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & & \\ & 2I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & 6I_{2 \times 2} & I_{2 \times 2} & \\ & & I_{2 \times 2} & & I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} & \end{bmatrix}$$

二次元 FEM

λ, μ と h は一定と仮定

$\Delta = \Delta P_i P_j P_k$ 内の歪みポテンシャルエネルギー

$$\begin{aligned} U_{i,j,k} &= \int_{\Delta} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\lambda I_{\lambda} + \mu I_{\mu}) \boldsymbol{\varepsilon} h \, dS \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^T & \mathbf{u}_j^T & \mathbf{u}_k^T \end{bmatrix} K_{i,j,k} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$K_{i,j,k} = \lambda J_{\lambda}^{i,j,k} + \mu J_{\mu}^{i,j,k}$$

(参照 Chapter_2_Finite_Element_Approximation.pdf)

二次元 FEM

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_k \\ y_k - y_i \\ y_i - y_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{-1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_j - x_k \\ x_k - x_i \\ x_i - x_j \end{bmatrix}$$

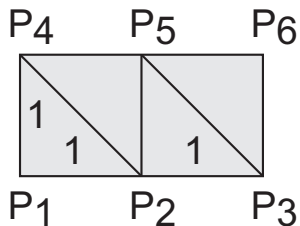
$$H_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^\top & \mathbf{a}\mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b}\mathbf{a}^\top & \mathbf{b}\mathbf{b}^\top \end{bmatrix} h\Delta$$

$$H_\mu = \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}\mathbf{a}^\top + \mathbf{b}\mathbf{b}^\top & \mathbf{b}\mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a}\mathbf{b}^\top & 2\mathbf{b}\mathbf{b}^\top + \mathbf{a}\mathbf{a}^\top \end{bmatrix} h\Delta$$

$H_\lambda, H_\mu \rightarrow$ の 1, 4, 2, 5, 3, 6 行と列

$J_\lambda^{i,j,k}, J_\mu^{i,j,k}$ の 1, 2, 3, 4, 5, 6 行と列

例（剛性行列）



$h = 2$ （一定）

剛性行列

$$K = K_{1,2,4} \oplus K_{2,3,5} \oplus K_{5,4,2} \oplus K_{6,5,3}$$

例（剛性行列）

λ と μ が全領域で一定と仮定

$$\begin{aligned} K &= K_{1,2,4} \oplus K_{2,3,5} \oplus K_{5,4,2} \oplus K_{6,5,3} \\ &= (\lambda J_{\lambda}^{1,2,4} + \mu J_{\mu}^{1,2,4}) \oplus (\lambda J_{\lambda}^{2,3,5} + \mu J_{\mu}^{2,3,5}) \oplus \dots \\ &= \lambda (J_{\lambda}^{1,2,4} \oplus J_{\lambda}^{2,3,5} \oplus \dots) + \mu (J_{\mu}^{1,2,4} \oplus J_{\mu}^{2,3,5} \oplus \dots) \\ &= \lambda J_{\lambda} + \mu J_{\mu} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} J_{\lambda} &= J_{\lambda}^{1,2,4} \oplus J_{\lambda}^{2,3,5} \oplus J_{\lambda}^{5,4,2} \oplus J_{\lambda}^{6,5,3} \\ J_{\mu} &= J_{\mu}^{1,2,4} \oplus J_{\mu}^{2,3,5} \oplus J_{\mu}^{5,4,2} \oplus J_{\mu}^{6,5,3} \end{aligned}$$

例 (剛性行列)

$$P_1 P_2 P_4: \quad \mathbf{a} = [-1, 1, 0]^T \text{ and } \mathbf{b} = [-1, 0, 1]^T$$

$$H_\lambda = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$J_\lambda^{1,2,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

例 (剛性行列)

$P_1P_2P_4$: $\mathbf{a} = [-1, 1, 0]^T$ and $\mathbf{b} = [-1, 0, 1]^T$

$$H_\mu = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right]$$
$$J_\mu^{1,2,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ \hline -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

例（剛性行列）

$$J_{\lambda}^{1,2,4} = J_{\lambda}^{2,3,5} = J_{\lambda}^{5,4,2} = J_{\lambda}^{6,5,3}$$

$$J_{\mu}^{1,2,4} = J_{\mu}^{2,3,5} = J_{\mu}^{5,4,2} = J_{\mu}^{6,5,3}$$

例（剛性行列）

$J_{\lambda}^{1,2,4}$ の J_{λ} への寄与

1	1	-1	0		0	-1	
1	1	-1	0		0	-1	
-1	-1	1	0		0	1	
0	0	0	0		0	0	
0	0	0	0		0	0	
-1	-1	1	0		0	1	

例 (剛性行列)

$J_{\lambda}^{2,3,5}$ の J_{λ} への寄与

	1	1	-1	0		0	-1
	1	1	-1	0		0	-1
	-1	-1	1	0		0	1
	0	0	0	0		0	0
	0	0	0	0		0	0
	-1	-1	1	0		0	1

例 (剛性行列)

$J_{\lambda}^{5,4,2}$ の J_{λ} への寄与

	0 0		0 0	0 0	
	0 1		1 0	-1 -1	
	0 1		1 0	-1 -1	
	0 0		0 0	0 0	
	0 -1		-1 0	1 1	
	0 -1		-1 0	1 1	

例（剛性行列）

$J_{\lambda}^{6,5,3}$ の J_{λ} への寄与

		0	0		0	0	0	0
		0	1		1	0	-1	-1
		0	1		1	0	-1	-1
		0	0		0	0	0	0
		0	-1		-1	0	1	1
		0	-1		-1	0	1	1

例 (剛性行列)

$$J_{\mu} = J_{\mu}^{1,2,4} \oplus J_{\mu}^{2,3,5} \oplus J_{\mu}^{5,4,2} \oplus J_{\mu}^{6,5,3}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc} 3 & 1 & -2 & -1 & & & -1 & 0 & & & \\ 1 & 3 & 0 & -1 & & & -1 & -2 & & & \\ \hline -2 & 0 & 6 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & \\ -1 & -1 & 1 & 6 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -4 & \\ \hline & & -2 & 0 & 3 & 0 & & & 0 & 1 & -1 & -1 \\ & & -1 & -1 & 0 & 3 & & & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & & & 3 & 0 & -2 & 0 & & \\ 0 & -2 & 1 & 0 & & & 0 & 3 & -1 & -1 & & \\ \hline & & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 6 & 1 & -2 & 0 \\ & & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 6 & -1 & -1 \\ \hline & & & & -1 & 0 & & & -2 & -1 & 3 & 1 \\ & & & & -1 & -2 & & & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

例（剛性行列）

剛性行列

$$K = \lambda J_\lambda + \mu J_\mu$$

λ, μ 材料の特性
 J_λ, J_μ 領域の幾何

歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^\top K \mathbf{u}_N$$

ラグランジュの方程式

運動エネルギーと歪みポテンシャルエネルギー

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_N^T M \dot{\mathbf{u}}_N, \quad U = \frac{1}{2} \mathbf{u}_N^T K \mathbf{u}_N$$

外力による仕事

$$W = \mathbf{f}^T \mathbf{u}_N$$

制約

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}_N - \mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = T - U + W + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{R}$$

ラグランジュの方程式

運動と変形に関するラグランジュの方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{0}$$

↓

$$-K \mathbf{u}_N + \mathbf{f} + A \boldsymbol{\lambda} - M \ddot{\mathbf{u}}_N = \mathbf{0}$$

↓

$$\dot{\mathbf{u}}_N = \mathbf{v}_N$$

$$M \dot{\mathbf{v}}_N - A \boldsymbol{\lambda} = -K \mathbf{u}_N + \mathbf{f}$$

ラグランジュの方程式

制約安定化の式

$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\alpha\dot{\mathbf{R}} + \alpha^2\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

↓

$$(A^T \ddot{\mathbf{u}}_N - \ddot{\mathbf{b}}(t)) + 2\alpha(A^T \dot{\mathbf{u}}_N - \dot{\mathbf{b}}(t)) + \alpha^2(A^T \mathbf{u}_N - \mathbf{b}(t)) = \mathbf{0}$$

↓

$$-A^T \dot{\mathbf{v}}_N = -\ddot{\mathbf{b}}(t) + 2\alpha(A^T \mathbf{v}_N - \dot{\mathbf{b}}(t)) + \alpha^2(A^T \mathbf{u}_N - \mathbf{b}(t))$$

ラグランジュの方程式

標準形

$$\dot{\mathbf{u}}_N = \mathbf{v}_N$$
$$\begin{bmatrix} M & -A \\ -A^\top & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_N \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K\mathbf{u}_N + \mathbf{f} \\ \mathbf{C}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) \end{bmatrix}$$

ここで

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N) = -\ddot{\mathbf{b}}(t) + 2\alpha(A^\top \mathbf{v}_N - \dot{\mathbf{b}}(t)) + \alpha^2(A^\top \mathbf{u}_N - \mathbf{b}(t))$$

ODE ソルバーを標準形に適用する

実装

MATLAB 上の二次元有限要素計算

[http://www.ritsumei.ac.jp/~hirai/edu/common/
soft_robotics/Physics_Soft_Bodies.html](http://www.ritsumei.ac.jp/~hirai/edu/common/soft_robotics/Physics_Soft_Bodies.html)

クラス NodalPoint, Triangle, Body

実装

```
classdef NodalPoint
    properties
        Coordinates;
        Displacement;
        Velocity
    end
    methods
        function obj = NodalPoint(p)
            obj.Coordinates = p;
        end
    end
end
```

実装

```
classdef Triangle
    properties
        Vertices;
        Area;
        Thickness;
        Density; lambda; mu;
        vector_a; vector_b;
        u_x; u_y; v_x; v_y;
        Cauchy_strain;
        Green_strain;
        Partial_J_lambda; Partial_J_mu;
        Partial_Stiffness_Matrix;
        Partial_Inertia_Matrix;
        Partial_Gravitational_Vector;
    end
    methods
        function obj = Triangle (i, j, k, pi, pj, pk, h)
```

実装

```
classdef Body
    properties
        numNodalPoints; NodalPoints;
        numTriangles; Triangles;
        strain_potential_energy;
        gravitational_potential_energy;
        J_lambda; J_mu;
        Stiffness_Matrix;
        Inertia_Matrix;
        Gravitational_Vector;
    end
    methods
        function obj = Body(npoints, points, ntris, tris, h)
            obj.numNodalPoints = npoints;
            for k=1:npoints
                pt(k) = NodalPoint(points(:,k));
            end
        end
    end
end
```

実装

クラス `Triangle` のメソッド

`partial_derivatives` 偏微分 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ を計算

`calculate_Cauchy_strain` 三角形内のコーシー歪みを計算

`partial_strain_potential_energy` 三角形内の歪みポテンシャルエネルギーポテンシャルエネルギー

`calculate_Green_strain` 三角形内のグリーン歪みを計算

`partial_strain_potential_energy_Green_strain` グリーン歪みを用いた歪みポテンシャルエネルギー

`partial_gravitational_potential_energy` 三角形内の重力ポテンシャルエネルギー

`partial_stiffness_matrix` 部分剛性行列 $K_{i,j,k}$ を計算

`partial_inertia_matrix` 部分慣性行列 $M_{i,j,k}$ を計算

`partial_gravitational_vector` 部分重力ベクトル $\mathbf{g}_{i,j,k}$ を計算

実装

クラス `Body` のメソッド

`total_strain_potential_energy` 歪みポテンシャルエネルギーを計算

`total_strain_potential_energy_Green_strain` グリーン歪みを用いた歪みポテンシャルエネルギー

`total_gravitational_potential_energy` 重力ポテンシャルエネルギー

`calculate_stiffness_matrix` 剛性行列 K を計算

`calculate_inertia_matrix` 慣性行列 M を計算

`calculate_gravitational_vector` 重力ベクトル \mathbf{g} を計算

`constraint_matrix` 指定した節点を固定するときの制約行列

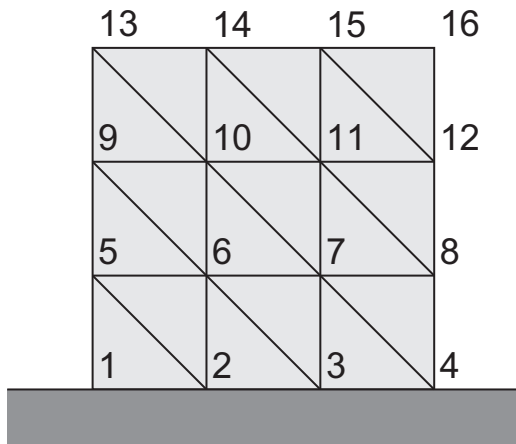
`draw` 全体の形状を描く

例（動的シミュレーション）

一辺 w の正方形の二次元弾性体

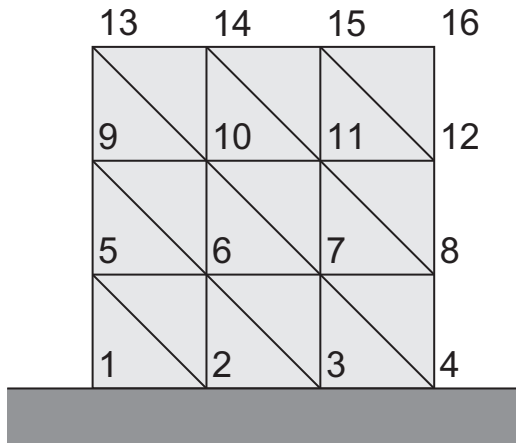
ヤング率 E , 粘性率 c , 密度 ρ

正方形を $3 \times 3 \times 2$ 個の三角形に分割



例（動的シミュレーション）

- $[0, t_{push}]$ 底面を固定 & $P_{14}P_{15}$ を下方に押す
 $[t_{push}, t_{hold}]$ 底面を固定 & $P_{14}P_{15}$ をその場に保持
 $[t_{hold}, t_{end}]$ 底面を固定 & $P_{14}P_{15}$ を解放



例（動的シミュレーション）

$[0, t_{push}]$

$$A^T \mathbf{u}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{u}_{14} \\ \mathbf{u}_{15} \end{bmatrix}$$

は制約される節点を指定する

例（動的シミュレーション）

$[0, t_{push}]$

$$b(t) = b_0 + b_1 t$$

ここで

$$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{push} \\ v_{push} \end{bmatrix}$$

$\dot{b}(t) = b_1$ と $\ddot{b}(t) = 0$ より

$$C(u_N, v_N) = 2\alpha(A^\top v_N - b_1) + \alpha^2(A^\top u_N - (b_0 + b_1 t))$$

例（動的シミュレーション）

$[t_{push}, t_{hold}]$

$$b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{push} t_{push} \\ v_{push} t_{push} \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

例（動的シミュレーション）

$[t_{hold}, t_{end}]$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4 = \mathbf{0}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} I & & & \dots \\ & I & & \dots \\ & & I & \dots \\ & & & I & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

例（動的シミュレーション）

```
% 正方形弾性物体の動的な変形 (4×4)
% g, cm, sec

addpath('..../two_dim_fea');

width = 30; height = 30; thickness = 1;
m = 4; n = 4;
[points, triangles] = rectangular_object(m, n, width, height)

% E = 1 MPa; c = 0.04 kPa s; rho = 1 g/cm2
Young = 10.0*1e+6; c = 0.4*1e+3; nu = 0.48; density = 1.00;
[lambda, mu] = Lamé_constants(Young, nu);
[lambda_vis, mu_vis] = Lamé_constants(c, nu);

npoints = size(points,2);
ntriangles = size(triangles,1);
elastic = Body(npoints, points, ntriangles, triangles, thickn
```

例（動的シミュレーション）

% 上部を保持している

```
b0 = [ zeros(2*4,1); 0; -vpush*tp; 0; -vpush*tp ];
```

```
b1 = zeros(2*6,1);
```

```
interval = [tp, tp+th];
```

```
qinit = q_push(end,:);
```

```
square_object_hold = @(t,q) square_object_constraint_param(t,q);
```

```
[time_hold, q_hold] = ode15s(square_object_hold, interval, qinit);
```

% 上部を解放

```
A = elastic.constraint_matrix([1,2,3,4]);
```

```
b0 = zeros(2*4,1);
```

```
b1 = zeros(2*4,1);
```

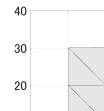
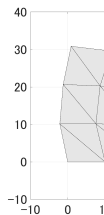
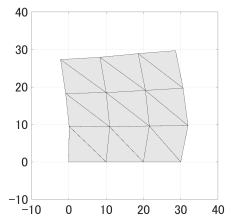
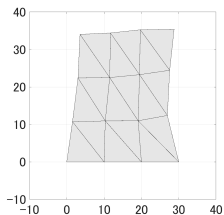
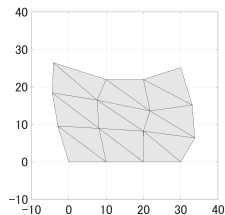
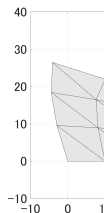
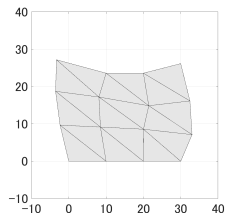
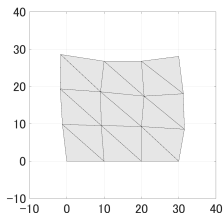
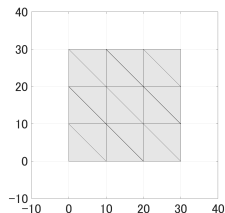
```
interval = [tp+th, tp+th+tf];
```

```
qinit = q_hold(end,:);
```

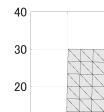
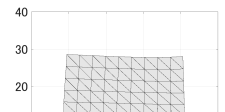
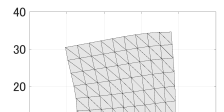
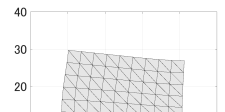
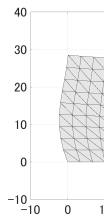
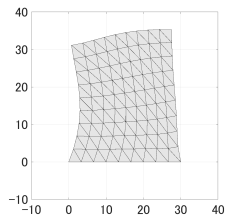
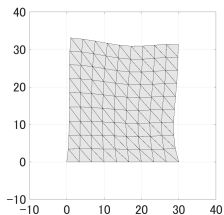
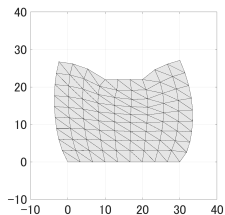
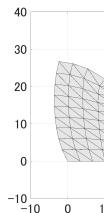
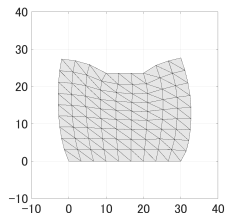
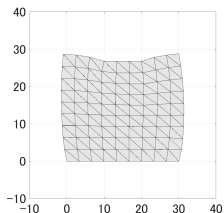
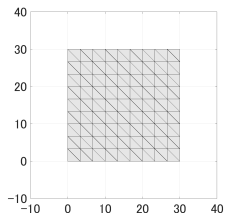
```
square_object_free = @(t,q) square_object_constraint_param(t,q);
```

```
[time_free, q_free] = ode15s(square_object_free, interval, qinit);
```

例 (動的シミュレーション)



例 (動的シミュレーション)

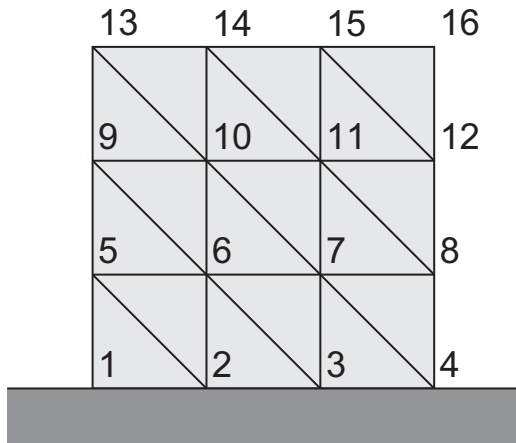


例（動的シミュレーション）

一辺 w の正方形の二次元弾性体

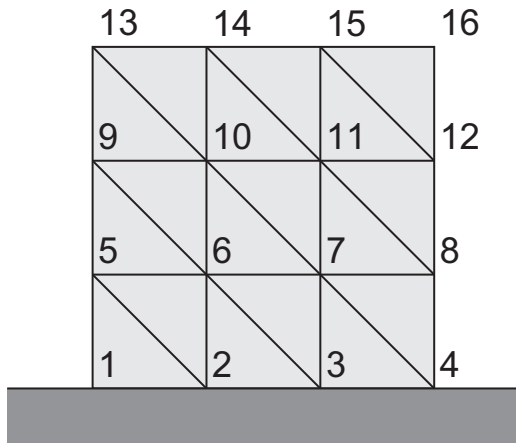
ヤング率 E , 粘性率 c , 密度 ρ

正方形を $3 \times 3 \times 2$ 個の三角形に分割



例（動的シミュレーション）

- $[0, t_{push}]$ 底面を固定 & $P_{14}P_{15}$ を下方に押す
 $[t_{push}, t_{hold}]$ 底面を固定 & $P_{14}P_{15}$ をその場に保持
 $[t_{hold}, t_{end}]$ 自由（ペナルティ法で反力を計算）



例（動的シミュレーション）

```
% 正方形弾性物体の跳躍 (4×4)
% g, cm, sec

addpath('../two_dim_fea');

width = 30; height = 30; thickness = 1;
m = 4; n = 4;
[points, triangles] = rectangular_object(m, n, width, height)

% E = 1 MPa; c = 0.04 kPa s; rho = 1 g/cm2
Young = 10.0*1e+6; c = 0.4*1e+3; nu = 0.48; density = 1.00;
% Kfloor = 0.002 MPa/m = 2 KPa/cm
Epfloor = 0.02*1e+6;
[lambda, mu] = Lamé_constants(Young, nu);
[lambda_vis, mu_vis] = Lamé_constants(c, nu);

npoints = size(points,2);
```

例（動的シミュレーション）

% 上部を保持している

```
b0 = [ zeros(2*4,1); 0; -vpush*tp; 0; -vpush*tp ];
```

```
b1 = zeros(2*6,1);
```

```
interval = [tp, tp+th];
```

```
qinit = q_push(end,:);
```

```
square_object_hold = @(t,q) square_object_constraint_param(t,q,
```

```
[time_hold, q_hold] = ode15s(square_object_hold, interval, qinit);
```

% すべての制約を解放

```
floor_force = @(t,npoints,un,vn) floor_force_param(t,npoints,un,vn);
```

端の床反力

```
interval = [tp+th, tp+th+tf];
```

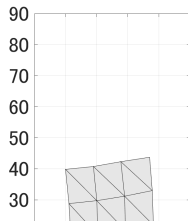
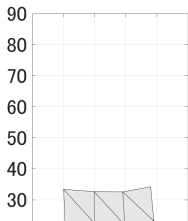
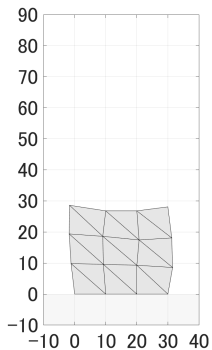
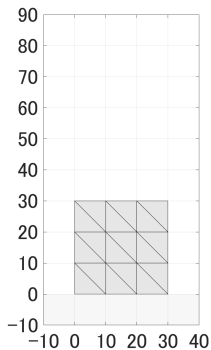
```
qinit = q_hold(end,:);
```

```
square_object_free = @(t,q) square_object_free_param(t,q, elast);
```

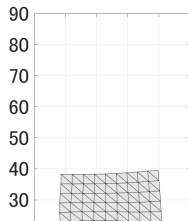
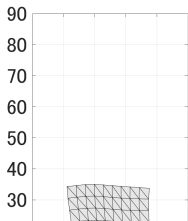
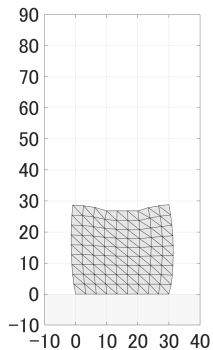
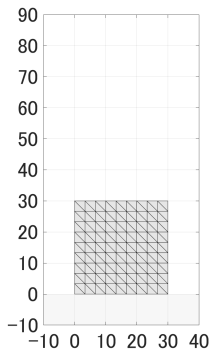
```
[time_free, q_free] = ode15s(square_object_free, interval, qinit);
```

```
time = [time_push; time_hold; time_free];
```

例 (動的シミュレーション)



例 (動的シミュレーション)



例（動的シミュレーション）

- 運動と変形を適切にシミュレーションすることができる。
- 計算結果はメッシュに依存し、アーティファクトを含む。
- 細かいメッシュはより良い結果を得る。ただし計算時間を要する。

まとめ

有限要素法

- エネルギーの積分表現
- エネルギーを有限個の変数で近似

二次元変形

- 三角形に分割しエネルギーを計算

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「有限要素法 (二次元)」
締切：2024年7月29日 (月曜) 00:10 AM