数値計算：有限要素法（二次元）

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

二次元/三次元変形

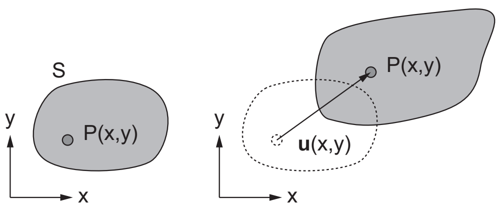
一次元変形

伸び歪み ε
ヤング率 E
歪みポテンシャルエネルギー密度 $\frac{1}{2}E\varepsilon^2$

二次元/三次元変形

伸び歪み & せん断歪み → 歪みベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}$
ラメの定数 $\lambda,\ \mu$ → 弾性行列 $\lambda I_\lambda + \mu I_\mu$
歪みポテンシャルエネルギー密度 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^\top(\lambda I_\lambda + \mu I_\mu)\boldsymbol{\varepsilon}$

二次元変形

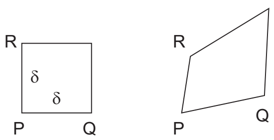


自然状態　　移動/変形状態

変位ベクトル

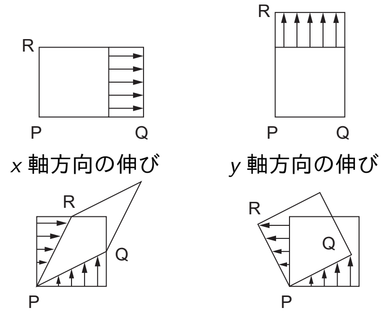
$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix}$$

二次元変形



自然状態　　変形と回転

二次元変形



二次元変形

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \text{ 軸方向の伸び} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = y \text{ 軸方向の伸び}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \text{せん断} + \text{回転} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \text{せん断} - \text{回転}$$

$$\Downarrow$$

コーシー歪み (Cauchy strain)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

二次元変形

歪みベクトル

$$\boldsymbol{\varepsilon} \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

二次元変形

歪みポテンシャルエネルギー密度

線形等方弾性材料

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^\top(\lambda I_\lambda + \mu I_\mu)\boldsymbol{\varepsilon}$$

λ と μ はラメの定数

$$I_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & & \end{bmatrix}, \quad I_\mu = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

二次元変形

体積要素

$$h \, \mathrm{d}S = h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_S \frac{1}{2} \varepsilon^\top (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \varepsilon \, h \, \mathrm{d}S$$

二次元変形

体積要素

$$h \, \mathrm{d}S = h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

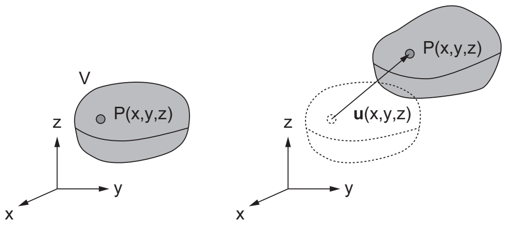
歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_S \frac{1}{2} \varepsilon^\top (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \varepsilon \, h \, \mathrm{d}S$$

運動エネルギー

$$T = \int_S \frac{1}{2} \rho \, \dot{\boldsymbol{u}}^\top \dot{\boldsymbol{u}} \, h \, \mathrm{d}S$$

三次元変形

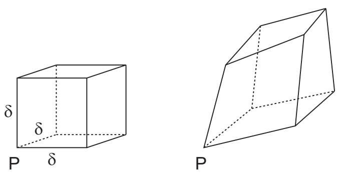


自然状態　　移動/変形状態

変位ベクトル

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

三次元変形



自然状態　　変形と回転

三次元変形

	u	v	w
$\partial/\partial x$	伸び（x 軸）	せん断 + 回転 (xy)	せん断 − 回転 (zx)
$\partial/\partial y$	せん断 − 回転 (xy)	伸び（y 軸）	せん断 + 回転 (yz)
$\partial/\partial z$	せん断 + 回転 (zx)	せん断 − 回転 (yz)	伸び（z 軸）

$$2 \cdot yz \text{ 面内のせん断} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$2 \cdot zx \text{ 面内のせん断} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$2 \cdot xy \text{ 面内のせん断} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

三次元変形

コーシー歪み (Cauchy strain)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

三次元変形

歪みベクトル

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

三次元変形

歪みポテンシャルエネルギー密度

線形等方弾性材料

$$\frac{1}{2} \varepsilon^\top (\lambda I_\lambda + \mu I_\mu) \varepsilon$$

$$I_\lambda = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}\right], \quad I_\mu = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]$$

三次元変形

体積要素

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon^\top(\lambda I_\lambda + \mu I_\mu)\varepsilon\,\mathrm{d}V$$

三次元変形

体積要素

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

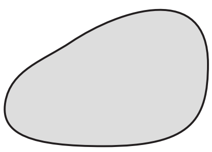
歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon^\top(\lambda I_\lambda + \mu I_\mu)\varepsilon\,\mathrm{d}V$$

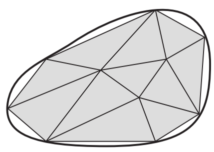
運動エネルギー

$$T = \int_V \frac{1}{2}\rho\,\dot{\boldsymbol{u}}^\top\dot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}V$$

二次元 FEM

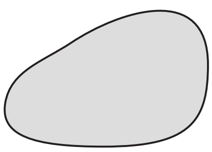


領域 S

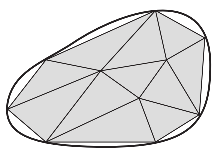


三角形による被覆

二次元 FEM



領域 S



三角形による被覆

$$\int_S \mathrm{d}S \approx \sum_{\text{triangles}} \int_{\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k} \mathrm{d}S$$

二次元 FEM

密度 ρ と厚さ h が一定と仮定
$\triangle = \triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ の運動エネルギー

$$T_{i,j,k} = \int_\triangle \frac{1}{2}\rho\,\dot{\boldsymbol{u}}^\top\dot{\boldsymbol{u}}\,h\,\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_i^\top & \dot{\boldsymbol{u}}_j^\top & \dot{\boldsymbol{u}}_k^\top \end{bmatrix} \frac{\rho h \triangle}{12} \begin{bmatrix} 2I_{2\times2} & I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & I_{2\times2} & 2I_{2\times2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_i \\ \dot{\boldsymbol{u}}_j \\ \dot{\boldsymbol{u}}_k \end{bmatrix}$$

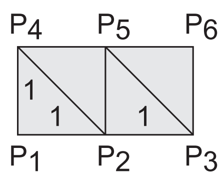
（参照 `Chapter_2_Finite_Element_Approximation.pdf` @
`www.ritsumei.ac.jp/~hirai/edu/common/soft_robotics/`）

二次元 FEM

部分慣性行列

$$M_{i,j,k} = \frac{\rho h \triangle}{12} \begin{bmatrix} 2I_{2\times2} & I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & I_{2\times2} & 2I_{2\times2} \end{bmatrix}$$

例（慣性行列）



$\rho h \triangle/12$ が一定値 1 であると仮定
部分慣性行列

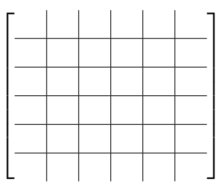
$$M_{1,2,4} = M_{2,3,5} = M_{5,4,2} = M_{6,5,3} = \begin{bmatrix} 2I_{2\times2} & I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ I_{2\times2} & I_{2\times2} & 2I_{2\times2} \end{bmatrix}.$$

例（慣性行列）

全運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N}^\top\,M\,\dot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_1^\top & \dot{\boldsymbol{u}}_2^\top & \cdots & \dot{\boldsymbol{u}}_6^\top \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{u}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{u}}_6 \end{bmatrix}$$

M: 慣性行列（6×6 ブロック行列）

例（慣性行列）

$$
M_{1,2,4} = \left[\begin{array}{c|c|c}
(1,1)\ \text{block} & (1,2)\ \text{block} & (1,4)\ \text{block} \\ \hline
(2,1)\ \text{block} & (2,2)\ \text{block} & (2,4)\ \text{block} \\ \hline
(4,1)\ \text{block} & (4,2)\ \text{block} & (4,4)\ \text{block}
\end{array}\right]
$$

$M_{1,2,4}$ の M への寄与

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
2I_{2\times2} & I_{2\times2} & & I_{2\times2} & & \\ \hline
I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & & I_{2\times2} & & \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
I_{2\times2} & I_{2\times2} & & 2I_{2\times2} & & \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}\right]
$$

例（慣性行列）

$$
M_{2,3,5} = \left[\begin{array}{c|c|c}
(2,2)\ \text{block} & (2,3)\ \text{block} & (2,5)\ \text{block} \\ \hline
(3,2)\ \text{block} & (3,3)\ \text{block} & (3,5)\ \text{block} \\ \hline
(5,2)\ \text{block} & (5,3)\ \text{block} & (5,5)\ \text{block}
\end{array}\right]
$$

$M_{2,3,5}$ の M への寄与

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & & & & & \\ \hline
 & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} & & I_{2\times2} & \\ \hline
 & I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & & I_{2\times2} & \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
 & I_{2\times2} & I_{2\times2} & & 2I_{2\times2} & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}\right]
$$

例（慣性行列）

$$
M_{5,4,2} = \left[\begin{array}{c|c|c}
(5,5)\ \text{block} & (5,4)\ \text{block} & (5,2)\ \text{block} \\ \hline
(4,5)\ \text{block} & (4,4)\ \text{block} & (4,2)\ \text{block} \\ \hline
(2,5)\ \text{block} & (2,4)\ \text{block} & (2,2)\ \text{block}
\end{array}\right]
$$

$M_{5,4,2}$ の M への寄与

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & & & & & \\ \hline
 & 2I_{2\times2} & & I_{2\times2} & I_{2\times2} & \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
 & I_{2\times2} & & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} & \\ \hline
 & I_{2\times2} & & I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & \\ \hline
 & & & & &
\end{array}\right]
$$

例（慣性行列）

$$
M_{6,5,3} = \left[\begin{array}{c|c|c}
(6,6)\ \text{block} & (6,5)\ \text{block} & (6,3)\ \text{block} \\ \hline
(5,6)\ \text{block} & (5,5)\ \text{block} & (5,3)\ \text{block} \\ \hline
(3,6)\ \text{block} & (3,5)\ \text{block} & (3,3)\ \text{block}
\end{array}\right]
$$

$M_{6,5,3}$ の M への寄与

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & & & & & \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
 & & 2I_{2\times2} & & I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ \hline
 & & & & & \\ \hline
 & & I_{2\times2} & & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} \\ \hline
 & & I_{2\times2} & & I_{2\times2} & 2I_{2\times2}
\end{array}\right]
$$

例（慣性行列）

慣性行列

$$
M = M_{1,2,4} \oplus M_{2,3,5} \oplus M_{5,4,2} \oplus M_{6,5,3}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
2I_{2\times2} & I_{2\times2} & & I_{2\times2} & & \\
I_{2\times2} & 6I_{2\times2} & I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & \\
 & I_{2\times2} & 4I_{2\times2} & & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} \\
I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & & 4I_{2\times2} & I_{2\times2} & \\
 & 2I_{2\times2} & 2I_{2\times2} & I_{2\times2} & 6I_{2\times2} & I_{2\times2} \\
 & & I_{2\times2} & & I_{2\times2} & 2I_{2\times2}
\end{bmatrix}
$$

二次元 FEM

λ, μ と h は一定と仮定
$\triangle = \triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ 内の歪みポテンシャルエネルギー

$$
U_{i,j,k} = \int_{\triangle} \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\varepsilon}^\top(\lambda I_\lambda + \mu I_\mu)\boldsymbol{\varepsilon}\, h\, \mathrm{d}S
$$

$$
= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i^\top & \boldsymbol{u}_j^\top & \boldsymbol{u}_k^\top \end{bmatrix} K_{i,j,k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_j \\ \boldsymbol{u}_k \end{bmatrix}
$$

ここで

$$
K_{i,j,k} = \lambda J_\lambda^{i,j,k} + \mu J_\mu^{i,j,k}
$$

（参照 `Chapter_2_Finite_Element_Approximation.pdf`）

二次元 FEM

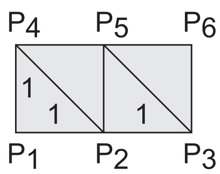
$$
\boldsymbol{a} = \frac{1}{2\triangle}\begin{bmatrix} y_j - y_k \\ y_k - y_i \\ y_i - y_j \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \frac{-1}{2\triangle}\begin{bmatrix} x_j - x_k \\ x_k - x_i \\ x_i - x_j \end{bmatrix}
$$

$$
H_\lambda = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\top \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^\top & \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^\top \end{bmatrix} h\triangle
$$

$$
H_\mu = \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^\top & \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^\top \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\top & 2\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^\top + \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top \end{bmatrix} h\triangle
$$

H_λ, H_μ $\rightarrow$ の $1, 4, 2, 5, 3, 6$ 行と列
$J_\lambda^{i,j,k}$, $J_\mu^{i,j,k}$ の $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 行と列

例（剛性行列）



$h = 2$ （一定）

剛性行列

$$
K = K_{1,2,4} \oplus K_{2,3,5} \oplus K_{5,4,2} \oplus K_{6,5,3}
$$

例（剛性行列）

λ と μ が全領域で一定と仮定

$$\begin{aligned} K &= K_{1,2,4} \oplus K_{2,3,5} \oplus K_{5,4,2} \oplus K_{6,5,3} \\ &= (\lambda J_{\lambda}^{1,2,4} + \mu J_{\mu}^{1,2,4}) \oplus (\lambda J_{\lambda}^{2,3,5} + \mu J_{\mu}^{2,3,5}) \oplus \cdots \\ &= \lambda (J_{\lambda}^{1,2,4} \oplus J_{\lambda}^{2,3,5} \oplus \cdots) + \mu (J_{\mu}^{1,2,4} \oplus J_{\mu}^{2,3,5} \oplus \cdots) \\ &= \lambda J_{\lambda} + \mu J_{\mu} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} J_{\lambda} &= J_{\lambda}^{1,2,4} \oplus J_{\lambda}^{2,3,5} \oplus J_{\lambda}^{5,4,2} \oplus J_{\lambda}^{6,5,3} \\ J_{\mu} &= J_{\mu}^{1,2,4} \oplus J_{\mu}^{2,3,5} \oplus J_{\mu}^{5,4,2} \oplus J_{\mu}^{6,5,3} \end{aligned}$$

例（剛性行列）

$\mathrm{P_1P_2P_4}$: $\quad \boldsymbol{a} = [-1,\, 1,\, 0]^{\top}$ and $\boldsymbol{b} = [-1,\, 0,\, 1]^{\top}$

$$H_{\lambda} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$J_{\lambda}^{1,2,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$\mathrm{P_1P_2P_4}$: $\quad \boldsymbol{a} = [-1,\, 1,\, 0]^{\top}$ and $\boldsymbol{b} = [-1,\, 0,\, 1]^{\top}$

$$H_{\mu} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$J_{\mu}^{1,2,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ \hline -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$$J_{\lambda}^{1,2,4} = J_{\lambda}^{2,3,5} = J_{\lambda}^{5,4,2} = J_{\lambda}^{6,5,3}$$

$$J_{\mu}^{1,2,4} = J_{\mu}^{2,3,5} = J_{\mu}^{5,4,2} = J_{\mu}^{6,5,3}$$

例（剛性行列）

$J_{\lambda}^{1,2,4}$ の J_{λ} への寄与

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & -1 & & & & \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & & & \\ -1 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$J_{\lambda}^{2,3,5}$ の J_{λ} への寄与

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 1 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & & \\ & & -1 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$J_{\lambda}^{5,4,2}$ の J_{λ} への寄与

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & & & 1 & 0 & -1 & -1 & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & & & 1 & 0 & -1 & -1 & & \\ & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$J_{\lambda}^{6,5,3}$ の J_{λ} への寄与

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc|cc|cc} & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & & & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & & 1 & 0 & -1 & -1 \\ & & & & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$$J_\lambda = J_\lambda^{1,2,4} \oplus J_\lambda^{2,3,5} \oplus J_\lambda^{5,4,2} \oplus J_\lambda^{6,5,3}$$

$$= \left[\begin{array}{rr|rr|rr|rr|rr|rr}
1 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & -1 & & & & \\
1 & 1 & -1 & 0 & & & 0 & -1 & & & & \\
\hline
-1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & & \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & & \\
\hline
& & -1 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & -1 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & -1 & -1 & & \\
-1 & -1 & 1 & 0 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
\hline
& & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\
& & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
& & & & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 & 1 \\
& & & & 0 & -1 & & & -1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

例（剛性行列）

$$J_\mu = J_\mu^{1,2,4} \oplus J_\mu^{2,3,5} \oplus J_\mu^{5,4,2} \oplus J_\mu^{6,5,3}$$

$$= \left[\begin{array}{rr|rr|rr|rr|rr|rr}
3 & 1 & -2 & -1 & & & -1 & 0 & & & & \\
1 & 3 & 0 & -1 & & & -1 & -2 & & & & \\
\hline
-2 & 0 & 6 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & & \\
-1 & -1 & 1 & 6 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -4 & & \\
\hline
& & -2 & 0 & 3 & 0 & & & 0 & 1 & -1 & -1 \\
& & -1 & -1 & 0 & 3 & & & 1 & 0 & 0 & -2 \\
\hline
-1 & -1 & 0 & 1 & & & 3 & 0 & -2 & 0 & & \\
0 & -2 & 1 & 0 & & & 0 & 3 & -1 & -1 & & \\
\hline
& & -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 6 & 1 & -2 & 0 \\
& & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 6 & -1 & -1 \\
\hline
& & & & -1 & 0 & & & -2 & -1 & 3 & 1 \\
& & & & -1 & -2 & & & 0 & -1 & 1 & 3
\end{array}\right]$$

例（剛性行列）

剛性行列

$$K = \lambda J_\lambda + \mu J_\mu$$

$\lambda,\ \mu$　材料の特性
$J_\lambda,\ J_\mu$　領域の幾何

歪みポテンシャルエネルギー

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\rm N}^\top \, K \, \boldsymbol{u}_{\rm N}$$

ラグランジュの方程式

運動エネルギーと歪みポテンシャルエネルギー

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{u}}_{\rm N}^\top \, M \, \dot{\boldsymbol{u}}_{\rm N}, \qquad U = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\rm N}^\top \, K \, \boldsymbol{u}_{\rm N}$$

外力による仕事

$$W = \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{u}_{\rm N}$$

制約

$$\boldsymbol{R} = A^\top \boldsymbol{u}_{\rm N} - \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{0}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L} = T - U + W + \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{R}$$

ラグランジュの方程式

運動と変形に関するラグランジュの方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}} = \boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$$-K \boldsymbol{u}_{\rm N} + \boldsymbol{f} + A \boldsymbol{\lambda} - M \ddot{\boldsymbol{u}}_{\rm N} = \boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{\rm N} = \boldsymbol{v}_{\rm N}$$
$$M \dot{\boldsymbol{v}}_{\rm N} - A \boldsymbol{\lambda} = -K \boldsymbol{u}_{\rm N} + \boldsymbol{f}$$

ラグランジュの方程式

制約安定化の式

$$\ddot{\boldsymbol{R}} + 2\alpha \dot{\boldsymbol{R}} + \alpha^2 \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$$(A^\top \ddot{\boldsymbol{u}}_{\rm N} - \ddot{\boldsymbol{b}}(t)) + 2\alpha (A^\top \dot{\boldsymbol{u}}_{\rm N} - \dot{\boldsymbol{b}}(t)) + \alpha^2 (A^\top \boldsymbol{u}_{\rm N} - \boldsymbol{b}(t)) = \boldsymbol{0}$$

$$\Downarrow$$

$$-A^\top \dot{\boldsymbol{v}}_{\rm N} = -\ddot{\boldsymbol{b}}(t) + 2\alpha (A^\top \boldsymbol{v}_{\rm N} - \dot{\boldsymbol{b}}(t)) + \alpha^2 (A^\top \boldsymbol{u}_{\rm N} - \boldsymbol{b}(t))$$

ラグランジュの方程式

標準形

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{\rm N} = \boldsymbol{v}_{\rm N}$$

$$\begin{bmatrix} M & -A \\ -A^\top & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_{\rm N} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \boldsymbol{u}_{\rm N} + \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}_{\rm N}, \boldsymbol{v}_{\rm N}) \end{bmatrix}$$

ここで

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}_{\rm N}, \boldsymbol{v}_{\rm N}) = -\ddot{\boldsymbol{b}}(t) + 2\alpha (A^\top \boldsymbol{v}_{\rm N} - \dot{\boldsymbol{b}}(t)) + \alpha^2 (A^\top \boldsymbol{u}_{\rm N} - \boldsymbol{b}(t))$$

ODE ソルバーを標準形に適用する

実装

MATLAB 上の二次元有限要素計算

`http://www.ritsumei.ac.jp/~hirai/edu/common/`
`soft_robotics/Physics_Soft_Bodies.html`

クラス `NodalPoint`, `Triangle`, `Body`

実装

```
classdef NodalPoint
    properties
        Coordinates;
        Displacement;
        Velocity
    end
    methods
        function obj = NodalPoint(p)
            obj.Coordinates = p;
        end
    end
end
```


実装

```
classdef Triangle
    properties
        Vertices;
        Area;
        Thickness;
        Density; lambda; mu;
        vector_a; vector_b;
        u_x; u_y; v_x; v_y;
        Cauchy_strain;
        Green_strain;
        Partial_J_lambda; Partial_J_mu;
        Partial_Stiffness_Matrix;
        Partial_Inertia_Matrix;
        Partial_Gravitational_Vector;
    end
    methods
        function obj = Triangle (i, j, k, pi, pj, pk, h)
```


実装

```
classdef Body
    properties
        numNodalPoints; NodalPoints;
        numTriangles; Triangles;
        strain_potential_energy;
        gravitational_potential_energy;
        J_lambda; J_mu;
        Stiffness_Matrix;
        Inertia_Matrix;
        Gravitational_Vector;
    end
    methods
        function obj = Body(npoints, points, ntris, tris, h)
            obj.numNodalPoints = npoints;
            for k=1:npoints
                pt(k) = NodalPoint(points(:,k));
            end
```


実装

クラス Triangle のメソッド

partial_derivaties 偏微分 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ を計算
calculate_Cauchy_strain 三角形内のコーシー歪みを計算
partial_strain_potential_energy 三角形内の歪みポテンシャルエネルギポテンシャルエネルギー
calculate_Green_strain 三角形内のグリーン歪みを計算
partial_strain_potential_energy_Green_strain グリーン歪みを用いた歪みポテンシャルエネルギー
partial_gravitational_potential_energy 三角形内の重力ポテンシャルエネルギー
partial_stiffness_matrix 部分剛性行列 $K_{i,j,k}$ を計算
partial_inertia_matrix 部分慣性行列 $M_{i,j,k}$ を計算
partial_gravitational_vector 部分重力ベクトル $\boldsymbol{g}_{i,j,k}$ を計算

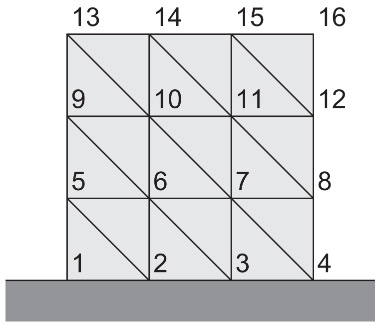
実装

クラス Body のメソッド

total_strain_potential_energy 歪みポテンシャルエネルギーを計算
total_strain_potential_energy_Green_strain グリーン歪みを用いた歪みポテンシャルエネルギー
total_gravitational_potential_energy 重力ポテンシャルエネルギー
calculate_stiffness_matrix 剛性行列 K を計算
calculate_inertia_matrix 慣性行列 M を計算
calculate_gravitational_vector 重力ベクトル $\boldsymbol{g}$ を計算
constraint_matrix 指定した節点を固定するときの制約行列
draw 全体の形状を描く

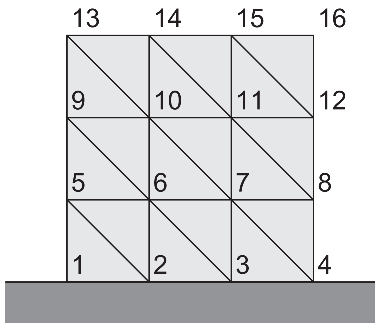
例（動的シミュレーション）

一辺 w の正方形の二次元弾性体
ヤング率 E，粘性率 c，密度 ρ
正方形を $3 \times 3 \times 2$ 個の三角形に分割



例（動的シミュレーション）

$[0,\ t_{push}]$ 底面を固定 & $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{15}$ を下方に押す
$[t_{push},\ t_{hold}]$ 底面を固定 & $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{15}$ をその場に保持
$[t_{hold},\ t_{end}]$ 底面を固定 & $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{15}$ を解放



例（動的シミュレーション）

$[0,\ t_{push}]$ 押し速度 v_{push}

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$
$$\boldsymbol{u}_{14} = \boldsymbol{u}_{15} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}_{push} t$$

ここで $\boldsymbol{v}_{push} = [0,\ -v_{push}]^{\top}$

$$A^{\top} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} I & & & & \cdots & \\ & I & & & \cdots & \\ & & I & & \cdots & \\ & & & I & \cdots & \\ & & & & \cdots & I \\ & & & & \cdots & & I \end{array}\right] \\ \text{1 2 3 4 \quad 14 15-th block columns} \end{array}$$

例（動的シミュレーション）

$[0,\ t_{push}]$

$$A^\top \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{u}_{14} \\ \boldsymbol{u}_{15} \end{bmatrix}$$

は制約される節点を指定する

例（動的シミュレーション）

$[0,\ t_{push}]$

$$\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t$$

ここで

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}_{push} \\ \boldsymbol{v}_{push} \end{bmatrix}$$

$\dot{\boldsymbol{b}}(t) = \boldsymbol{b}_1$ と $\ddot{\boldsymbol{b}}(t) = \boldsymbol{0}$ より

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}) = 2\alpha(A^\top \boldsymbol{v}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{b}_1) + \alpha^2(A^\top \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} - (\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t))$$

例（動的シミュレーション）

$[t_{push},\ t_{hold}]$

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v}_{push} t_{push} \\ \boldsymbol{v}_{push} t_{push} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

例（動的シミュレーション）

$[t_{hold},\ t_{end}]$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{0}$$

$$A^\top = \begin{bmatrix} I & & & & \cdots \\ & I & & & \cdots \\ & & I & & \cdots \\ & & & I & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

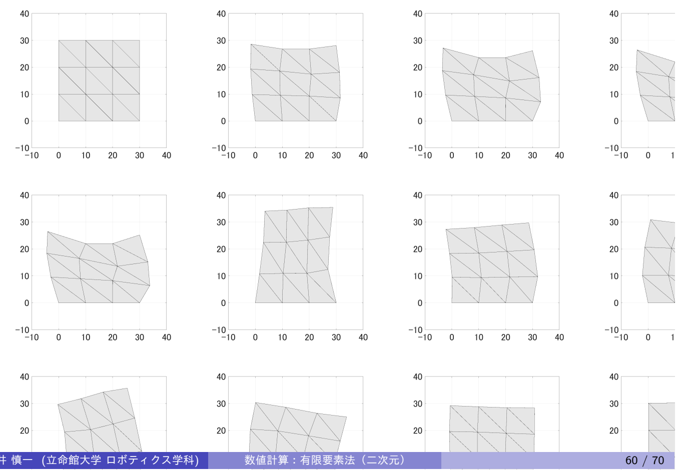
例（動的シミュレーション）

```
% 正方形弾性物体の動的な変形 (4&times;4)
% g, cm, sec

addpath('../two_dim_fea');

width = 30; height = 30; thickness = 1;
m = 4; n = 4;
[points, triangles] = rectangular_object(m, n, width, height)

% E = 1 MPa; c = 0.04 kPa s; rho = 1 g/cm^2
Young = 10.0*1e+6; c = 0.4*1e+3; nu = 0.48; density = 1.00;
[lambda, mu] = Lame_constants(Young, nu);
[lambda_vis, mu_vis] = Lame_constants(c, nu);

npoints = size(points,2);
ntriangles = size(triangles,1);
elastic = Body(npoints, points, ntriangles, triangles, thickne
```

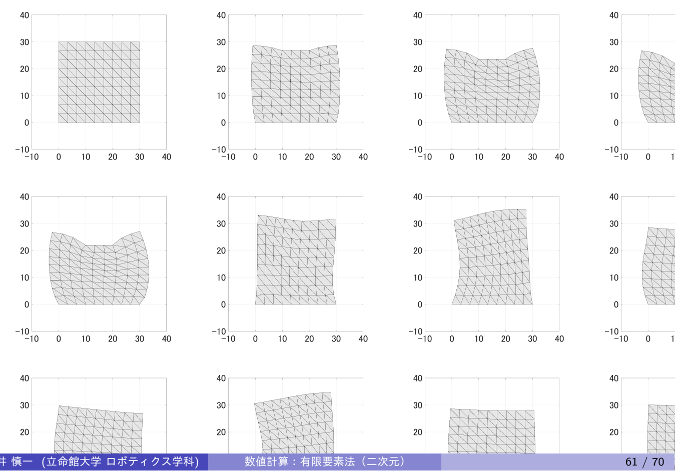

例（動的シミュレーション）

```
% 上部を保持している
b0 = [ zeros(2*4,1); 0; -vpush*tp; 0; -vpush*tp ];
b1 = zeros(2*6,1);
interval = [tp, tp+th];
qinit = q_push(end,:);
square_object_hold = @(t,q) square_object_constraint_param(t,
[time_hold, q_hold] = ode15s(square_object_hold, interval, qi

% 上部を解放
A = elastic.constraint_matrix([1,2,3,4]);
b0 = zeros(2*4,1);
b1 = zeros(2*4,1);
interval = [tp+th, tp+th+tf];
qinit = q_hold(end,:);
square_object_free = @(t,q) square_object_constraint_param(t,
[time_free, q_free] = ode15s(square_object_free, interval, qi
```


例（動的シミュレーション）

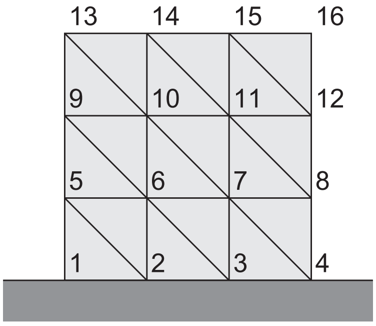


例（動的シミュレーション）



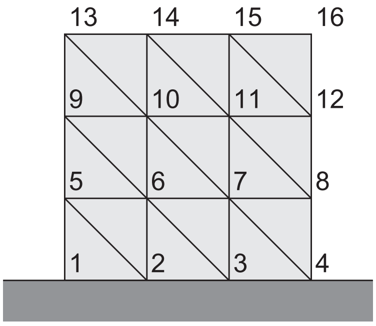
例（動的シミュレーション）

一辺 w の正方形の二次元弾性体
ヤング率 E，粘性率 c，密度 ρ
正方形を $3 \times 3 \times 2$ 個の三角形に分割



例（動的シミュレーション）

$[0, t_{push}]$ 底面を固定 & $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{15}$ を下方に押す
$[t_{push}, t_{hold}]$ 底面を固定 & $\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{15}$ をその場に保持
$[t_{hold}, t_{end}]$ 自由（ペナルティ法で反力を計算）



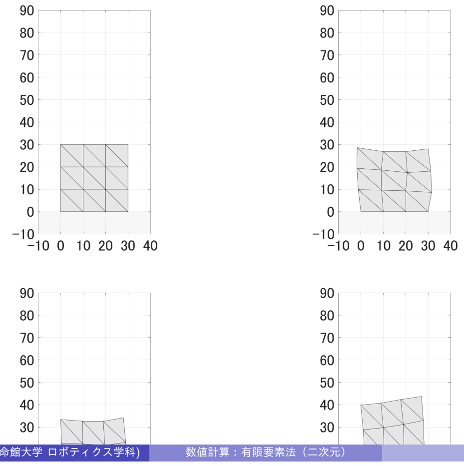
例（動的シミュレーション）

```
% 正方形弾性物体の跳躍（4&times;4)
% g, cm, sec

addpath('../two_dim_fea');

width = 30; height = 30; thickness = 1;
m = 4; n = 4;
[points, triangles] = rectangular_object(m, n, width, height)

% E = 1 MPa; c = 0.04 kPa s; rho = 1 g/cm^2
Young = 10.0*1e+6; c = 0.4*1e+3; nu = 0.48; density = 1.00;
% Kfloor = 0.002 MPa/m = 2 KPa/cm
Epfloor = 0.02*1e+6;
[lambda, mu] = Lame_constants(Young, nu);
[lambda_vis, mu_vis] = Lame_constants(c, nu);

npoints = size(points,2);
```

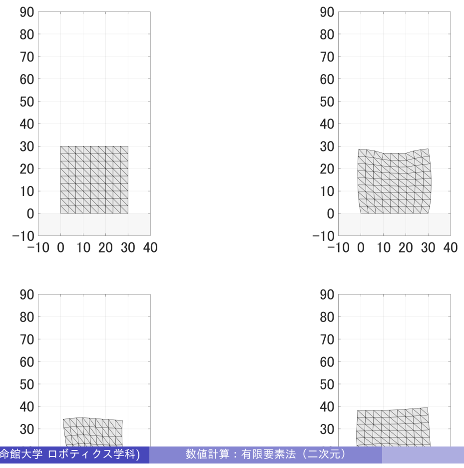

例（動的シミュレーション）

```
% 上部を保持している
b0 = [ zeros(2*4,1); 0; -vpush*tp; 0; -vpush*tp ];
b1 = zeros(2*6,1);
interval = [tp, tp+th];
qinit = q_push(end,:);
square_object_hold = @(t,q) square_object_constraint_param(t,q
[time_hold, q_hold] = ode15s(square_object_hold, interval, qi

% すべての制約を解放
floor_force = @(t,npoints,un,vn) floor_force_param(t,npoints,u
端の床反力
interval = [tp+th, tp+th+tf];
qinit = q_hold(end,:);
square_object_free = @(t,q) square_object_free_param(t,q, ela
[time_free, q_free] = ode15s(square_object_free, interval, qi

time = [time_push; time_hold; time_free];
```


例（動的シミュレーション）



例（動的シミュレーション）



例（動的シミュレーション）

- 運動と変形を適切にシミュレーションすることができる．
- 計算結果はメッシュに依存し，アーティファクトを含む．
- 細かいメッシュはより良い結果を得る．ただし計算時間を要する．

まとめ

有限要素法

- エネルギーの積分表現
- エネルギーを有限個の変数で近似

二次元変形

- 三角形に分割しエネルギーを計算

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「有限要素法（二次元）」
締切：2024 年 7 月 29 日（月曜）00:10 AM