数値計算：有限要素法

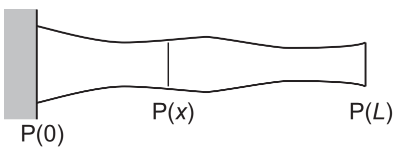
平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

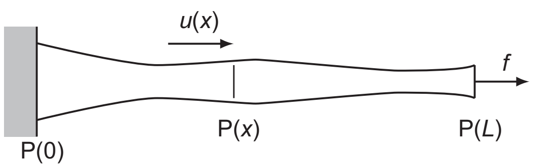
講義の流れ

1. ビームの静的変形
   - ビームの一次元変形の積分表現
   - 積分表現の近似
   - 釣り合いの方程式の計算
2. ビームの動的変形
   - ビームの一次元動的変形
   - 運動エネルギー
   - ラグランジュの運動方程式
3. まとめ

ビームの一次元静的変形



自然状態



変形状態

ビームの一次元静的変形

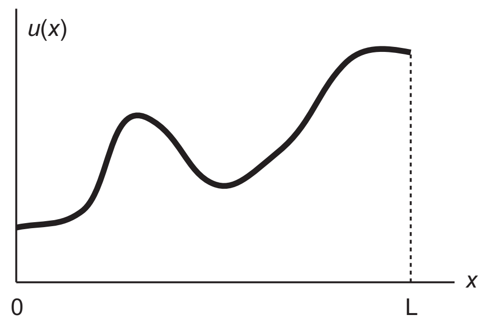
L	ビームの長さ
$\mathrm{P}(x)$	左端から距離 x の点
$E(x)$	点 $\mathrm{P}(x)$ におけるヤング率
$A(x)$	点 $\mathrm{P}(x)$ における断面積

$u(x)$　点 $\mathrm{P}(x)$ の変位

$$\Downarrow$$

ビームの変形：　関数 $u(x)$ $(0 \leq x \leq L)$

ビームの一次元静的変形



ビームの一次元静的変形

左端 $\mathrm{P}(0)$：　空間に固定
右端 $\mathrm{P}(L)$：　外力 f を作用

ビームの変形を表す微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

ただし

$$u(0) = 0$$
$$E(L)A(L)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(L) = f$$

境界値問題 (boundary value problem)

ルンゲクッタ法等：常微分方程式の初期値問題の解法
境界値問題には不向き

有限要素法

有限要素法 (finite element method; FEM)

境界値問題を解く手法

1. 境界値問題と等価な積分表現を導く
2. 未知関数を近似し，積分表現を有限個の変数で表す
3. 積分表現を最小化 (最大化) する変数を求める

積分表現

弾性ポテンシャルエネルギー U：

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

外力 f による仕事 W：

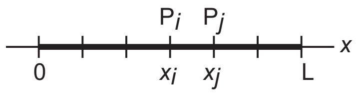
$$W = f\, u(L)$$

静力学の変分原理：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && I = U - W \\ &\text{subject to} && u(0) = 0 \end{aligned}$$

未知関数の近似

区間 $[0,\ L]$ を 6 個の小区間に等分
各小区間の幅：$h = L/6$



節点 (nodal point)

$$x_0 = 0,\ x_1 = h,\ x_2 = 2h,\ \cdots,\ x_6 = L$$

節点上の変位 $u_i \triangleq u(x_i)$

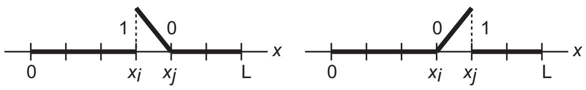
未知関数 $u(x)$：7 個の変数 $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_6$ で表される

未知関数の近似

小区間 $[x_i,\ x_j]$ における関数 $u(x)$ の区分線形補間

$$u(x) = u_i\,N_{i,j}(x) + u_j\,N_{j,i}(x), \qquad (x_i \le x \le x_j)$$

u_i, u_j：節点 x_i, x_j における変位



$$N_{i,j}(x) = \frac{x_j - x}{h} = \begin{cases} 1 & (x = x_i) \\ 0 & (x = x_j) \end{cases}$$

$$N_{j,i}(x) = \frac{x - x_i}{h} = \begin{cases} 1 & (x = x_j) \\ 0 & (x = x_i) \end{cases}$$

未知関数の近似

未知関数：$u(x)\ (0 \le x \le L)$

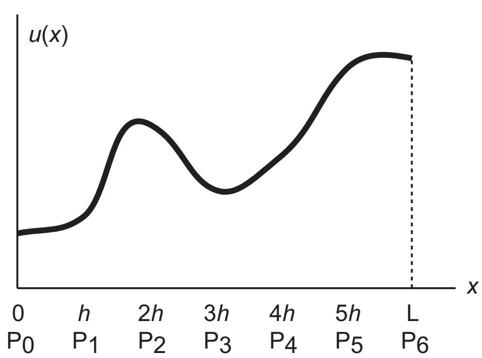
$\Downarrow$

区分線形補間

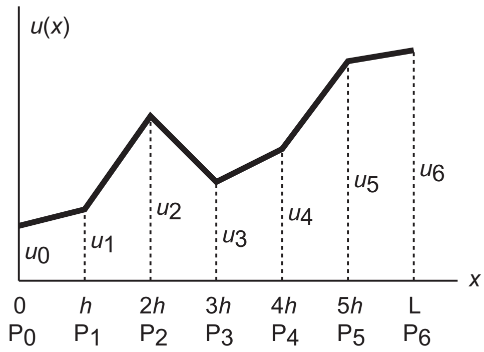
$$u(x) = \begin{cases} u_0\,N_{0,1}(x) + u_1\,N_{1,0}(x) & (x_0 \le x \le x_1) \\ u_1\,N_{1,2}(x) + u_2\,N_{2,1}(x) & (x_1 \le x \le x_2) \\ u_2\,N_{2,3}(x) + u_3\,N_{3,2}(x) & (x_2 \le x \le x_3) \\ \vdots & \\ u_5\,N_{5,6}(x) + u_6\,N_{6,5}(x) & (x_5 \le x \le x_6) \end{cases}$$

関数 $u(x)$ を 7 個の変数 $u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_6$ で表す

未知関数の近似



未知関数の近似



未知関数の近似

小区間 $[x_i,\ x_j]$：

$$N_{i,j}(x) = \frac{x_j - x}{h}, \qquad N_{j,i}(x) = \frac{x - x_i}{h}$$

$$N'_{i,j}(x) = \frac{-1}{h}, \qquad N'_{j,i}(x) = \frac{1}{h}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= u_i\,N_{i,j}(x) + u_j\,N_{j,i}(x) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= u_i N'_{i,j}(x) + u_j N'_{j,i}(x) \\ &= u_i \frac{-1}{h} + u_j \frac{1}{h} \\ &= \frac{-u_i + u_j}{h} \end{aligned}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

弾性ポテンシャルエネルギー
$\Longrightarrow$ 7 個の変数 $u_0,\ u_1,\ \cdots,\ u_6$ で表す
変位ベクトル

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_6 \end{bmatrix}$$

積分を分解

$$\int_0^L = \int_{x_0}^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{x_3} + \cdots + \int_{x_5}^{x_6}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

ヤング率 E が一定と仮定

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2} EA \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x &= \int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2} EA \left(\frac{-u_i + u_j}{h} \right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \frac{E}{h^2} (-u_i + u_j)^2 \int_{x_i}^{x_j} A\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{i,j} & -V_{i,j} \\ -V_{i,j} & V_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$V_{i,j} = \int_{x_i}^{x_j} A\,\mathrm{d}x$$

$\Longrightarrow$ 小区間 $[x_i,\ x_j]$ で切り取られる領域の体積

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_0 & u_1 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} \\ -V_{0,1} & V_{0,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{1,2} & -V_{1,2} \\ -V_{1,2} & V_{1,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \\
&\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{2,3} & -V_{2,3} \\ -V_{2,3} & V_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \cdots + \\
&\quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_5 & u_6 \end{bmatrix} \frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{5,6} & -V_{5,6} \\ -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}{}^{\top} K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1}+V_{1,2} & -V_{1,2} & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2}+V_{2,3} & -V_{2,3} & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & V_{4,5}+V_{5,6} & -V_{5,6} \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}{}^{\top} K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1}+V_{1,2} & -V_{1,2} & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2}+V_{2,3} & -V_{2,3} & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & V_{4,5}+V_{5,6} & -V_{5,6} \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

特に断面積 A が一定の場合 $V_{i,j} = Ah$

$$K = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}{}^{\top} K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1}+V_{1,2} & -V_{1,2} & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2}+V_{2,3} & -V_{2,3} & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & V_{4,5}+V_{5,6} & -V_{5,6} \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

特に断面積 A が一定の場合 $V_{i,j} = Ah$

$$K = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}{}^{\top} K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$$

剛性行列 $K =$

$$\frac{E}{h^2} \begin{bmatrix} V_{0,1} & -V_{0,1} & & & & \\ -V_{0,1} & V_{0,1}+V_{1,2} & -V_{1,2} & & & \\ & -V_{1,2} & V_{1,2}+V_{2,3} & -V_{2,3} & & \\ & & -V_{2,3} & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & V_{4,5}+V_{5,6} & -V_{5,6} \\ & & & & -V_{5,6} & V_{5,6} \end{bmatrix}$$

弾性ポテンシャルエネルギーの近似

特に断面積 A が一定の場合 $V_{i,j} = Ah$

$$K = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ -1 & 1+1 & -1 & & & & \\ & -1 & 1+1 & -1 & & & \\ & & -1 & 1+1 & -1 & & \\ & & & -1 & 1+1 & -1 & \\ & & & & -1 & 1+1 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

仕事

外力 f による仕事 $W = f\,u(L) = f\,u_6$

$$W = \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N}$$

ただし

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

制約

幾何制約 $u(0) = u_0 = 0$

$$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0$$

ただし

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

積分表現を有限個の変数で表現

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & I = U - W \\ \text{subject to} \quad & u(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & I(\boldsymbol{u}_\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{u}_\mathrm{N}^\top\,K\,\boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0 \end{aligned}$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

制約付き最小化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & I(\boldsymbol{u}_\mathrm{N}) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{u}_\mathrm{N}^\top\,K\,\boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N}, \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0 \end{aligned}$$

$\Downarrow$ ラグランジュの未定乗数を導入

制約なし最小化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad J(\boldsymbol{u}_\mathrm{N}, \lambda) &= I(\boldsymbol{u}_\mathrm{N}) - \lambda \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} \\ &= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{u}_\mathrm{N}^\top\,K\,\boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \boldsymbol{f}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \lambda \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} \end{aligned}$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}_\mathrm{N}} &= K\boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \boldsymbol{f} - \lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= -\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

ベクトル形式

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -\boldsymbol{a} \\ \hline -\boldsymbol{a}^\top & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{u}_\mathrm{N} \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}_\mathrm{N}} &= K\boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \boldsymbol{f} - \lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= -\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

ベクトル形式

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -\boldsymbol{a} \\ \hline -\boldsymbol{a}^\top & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{u}_\mathrm{N} \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

積分表現を最小化(最大化)する変数を計算

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{u}_\mathrm{N}} &= K\boldsymbol{u}_\mathrm{N} - \boldsymbol{f} - \lambda \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= -\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

ベクトル形式

$$\left[\begin{array}{c|c} K & -\boldsymbol{a} \\ \hline -\boldsymbol{a}^\top & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{u}_\mathrm{N} \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{f} \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

係数行列は正則 $\Longrightarrow$ 上式を解いて $\boldsymbol{u}_\mathrm{N}$ と λ の値を求める

サンプルプログラム beam_static.m

```
% ビームの静的変形（断面積一定）

L = 10; A = 2;
n = 6; h = L/n;
E = 200;
fext = 5;

e0 = 2*ones(n+1,1);
e0(1) = 1; e0(n+1) = 1;
e1 = (-1)*ones(n+1,1);
K = (E*A/h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角行
列
fprintf("剛性行列 K\n");
full(K)
```

サンプルプログラム beam_static.m

```
f = zeros(n+1,1);
f(n+1) = fext;
fprintf("ベクトル f\n");
f

a = zeros(n+1,1);
a(1) = 1;
fprintf("ベクトル a\n");
a

mat = [ K,  -a; ...
       -a’,  0 ];
vec = [ f; 0 ];
sol = mat \ vec;
un = sol(1:n+1);
lambda = sol(n+2);
```


サンプルプログラム beam_static.m

```
>> beam_static
剛性行列 K
ans =
   240  -240     0     0     0     0     0
  -240   480  -240     0     0     0     0
     0  -240   480  -240     0     0     0
     0     0  -240   480  -240     0     0
     0     0     0  -240   480  -240     0
     0     0     0     0  -240   480  -240
     0     0     0     0     0  -240   240

ベクトル f
f =
     0
     0
     0
     0
```


サンプルプログラム beam_static.m

```
計算結果
un =
         0
    0.0208
    0.0417
    0.0625
    0.0833
    0.1042
    0.1250


lambda =
   -5.0000
```


サンプルプログラム beam_static.m

```
伸び
ans =
    0.0208
    0.0208
    0.0208
    0.0208
    0.0208
    0.0208
```


サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
% ビームの静的変形（断面積が一定でない）

L = 10;
A = @(x) (2 - (1/10).*x); % 断面積を表す関数
V = @(xi,xj) (2*(xj-xi) - (1/20)*(xj.^2-xi.^2)); % 小区間で切
り取られる領域の体積
n = 6; h = L/n;
E = 200;
fext = 5;

xi = h*[0:n-1]’;
xj = h*[1:n]’;
Vij = V(xi,xj);
```


サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
e0 = [Vij;0] + [0;Vij];
em = (-1)*[Vij;0];
ep = (-1)*[0;Vij];
K = (E/(h^2))*spdiags([em e0 ep], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角
行列
fprintf("剛性行列 K\n");
full(K)

f = zeros(n+1,1);
f(n+1) = fext;
fprintf("ベクトル f\n");
f

a = zeros(n+1,1);
a(1) = 1;
fprintf("ベクトル a\n");
```


サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
>> beam_static_irregular
剛性行列 K
ans =
  230.0000 -230.0000         0         0         0         0
 -230.0000  440.0000 -210.0000         0         0         0
         0 -210.0000  400.0000 -190.0000         0         0
         0         0 -190.0000  360.0000 -170.0000         0
         0         0         0 -170.0000  320.0000 -150.0000
         0         0         0         0 -150.0000  280.0000
         0         0         0         0         0 -130.0000

ベクトル f
f =
     0
     0
     0
     0
```


サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
計算結果
un =
         0
    0.0217
    0.0455
    0.0719
    0.1013
    0.1346
    0.1731


lambda =
   -5.0000
```

サンプルプログラム beam_static_irregular.m

```
伸び
ans =
    0.0217
    0.0238
    0.0263
    0.0294
    0.0333
    0.0385
```


断面積が一定でない場合

体積

$$V_{i,j} = \int_{x_i}^{x_j} A(x)\,\mathrm{d}x$$

を数値積分で計算

MATLAB において定積分

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

の値を数値計算

```
S = integral(f, a, b);
```


断面積が一定でない場合

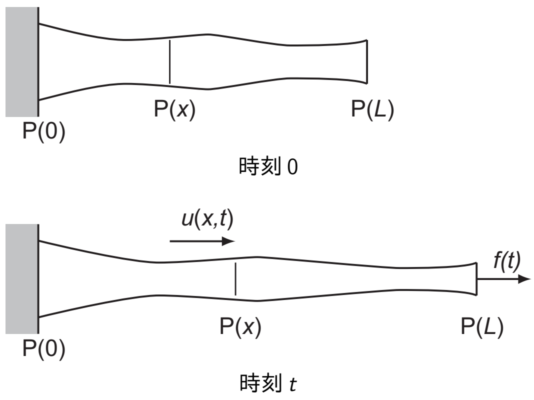
断面積 $A(x) = a - 2bx$ （a, b は正の定数で $A(L) > 0$ を満たす）

```
E = 2; rho = 1.0;
L = 10; a = 4; b = 0.1;
area = @(x) a - 2*b*x;

n = 4; h = L/n;
nodal = h*[0:n];

for i=1:n
    Vs(i) = integral(area, nodal(i), nodal(i+1));
end
V = zeros(n+1,n+1);
for i=1:n
    V(i:i+1,i:i+1) = V(i:i+1,i:i+1) + Vs(i)*[1,-1;-1,1];
end
K = E/h/h*V;
```


断面積が一定でない場合

```
>> irregular_beam

K =

    3.0000   -3.0000         0         0         0
   -3.0000    5.6000   -2.6000         0         0
         0   -2.6000    4.8000   -2.2000         0
         0         0   -2.2000    4.0000   -1.8000
         0         0         0   -1.8000    1.8000
```


ビームの一次元動的変形



運動エネルギーの近似

ビームの運動エネルギー

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^L \frac{1}{2}\rho A \dot{u}^2\,\mathrm{d}x$$

ビームの運動エネルギーを 7 個のパラメータ $u_0, u_1, \cdots, u_6$ で表す

小区間 $[\,x_i, x_j\,]$ における関数 $u(x,t)$ の区分線形補間：

$$u(x,t) = u_i(t)\,N_{i,j}(x) + u_j(t)\,N_{j,i}(x), \qquad (x_i \le x \le x_j)$$

時間微分

$$\dot{u}(x,t) = \dot{u}_i(t)\,N_{i,j}(x) + \dot{u}_j(t)\,N_{j,i}(x), \qquad (x_i \le x \le x_j)$$

運動エネルギーの近似

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_j} \frac{1}{2}\rho A \dot{u}^2 \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_j} \rho A \left\{\dot{u}_i(t)\,N_{i,j}(x) + \dot{u}_j(t)\,N_{j,i}(x)\right\}^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{u}_i & \dot{u}_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{i,j;\,i,j} & m_{i,j;\,j,i} \\ m_{j,i;\,i,j} & m_{j,i;\,j,i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_i \\ \dot{u}_j\end{bmatrix}\end{aligned}$$

ここで

$$m_{i,j;\,i,j} = \int_{x_i}^{x_j} \rho A \left(N_{i,j}\right)^2\,\mathrm{d}x, \quad m_{j,i;\,j,i} = \int_{x_i}^{x_j} \rho A \left(N_{j,i}\right)^2\,\mathrm{d}x$$

$$m_{i,j;\,j,i} = m_{j,i;\,i,j} = \int_{x_i}^{x_j} \rho A\, N_{i,j} N_{j,i}\,\mathrm{d}x$$

運動エネルギーの近似

$$\begin{aligned} T =& \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \dot{u}^2 \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{u}_0 & \dot{u}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{0,1;\,0,1} & m_{0,1;\,1,0} \\ m_{1,0;\,0,1} & m_{1,0;\,1,0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_0 \\ \dot{u}_1\end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{u}_1 & \dot{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{1,2;\,1,2} & m_{1,2;\,2,1} \\ m_{2,1;\,1,2} & m_{2,1;\,2,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_1 \\ \dot{u}_2\end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{u}_2 & \dot{u}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{2,3;\,2,3} & m_{2,3;\,3,2} \\ m_{3,2;\,2,3} & m_{3,2;\,3,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_2 \\ \dot{u}_3\end{bmatrix} + \cdots + \\ & \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{u}_5 & \dot{u}_6\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{5,6;\,5,6} & m_{5,6;\,6,5} \\ m_{6,5;\,5,6} & m_{6,5;\,6,5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{u}_5 \\ \dot{u}_6\end{bmatrix} \\ =& \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}^{\top} M \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

運動エネルギーの近似

慣性行列 $M =$

$$
\begin{bmatrix}
m_{0,1;\,0,1} & m_{0,1;\,1,0} & & & \\
m_{1,0;\,0,1} & m_{1,0;\,1,0} + m_{1,2;\,1,2} & m_{1,2;\,2,1} & & \\
& m_{2,1;\,1,2} & \ddots & m_{4,5;\,5,4} & \\
& & m_{5,4;\,4,5} & m_{5,4;\,5,4} + m_{5,6;\,5,6} & m_{5,6;\,6,5} \\
& & & m_{6,5;\,5,6} & m_{6,5;\,6,5}
\end{bmatrix}
$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$
\int_{x_i}^{x_j} (N_{i,j})^2 \, \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_j} (N_{j,i})^2 \, \mathrm{d}x = \frac{h}{3}
$$

$$
\int_{x_i}^{x_j} N_{i,j} N_{j,i} \, \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_j} N_{j,i} N_{i,j} \, \mathrm{d}x = \frac{h}{6}
$$

慣性行列

$$
M = \frac{\rho A h}{6}
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
& 1 & 4 & 1 & & & \\
& & 1 & 4 & 1 & & \\
& & & 1 & 4 & 1 & \\
& & & & 1 & 4 & 1 \\
& & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$
M = \frac{\rho A h}{6}
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & & \\
& 1 & 4 & 1 & & & \\
& & 1 & 4 & 1 & & \\
& & & 1 & 4 & 1 & \\
& & & & 1 & 4 & 1 \\
& & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$
M = \frac{\rho A h}{6}
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
1 & 2{+}2 & 1 & & & & \\
& 1 & 2{+}2 & 1 & & & \\
& & 1 & 2{+}2 & 1 & & \\
& & & 1 & 2{+}2 & 1 & \\
& & & & 1 & 2{+}2 & 1 \\
& & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

例

断面積 A と密度 ρ が一定の場合

$$
M = \frac{\rho A h}{6}
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
1 & 2{+}2 & 1 & & & & \\
& 1 & 2{+}2 & 1 & & & \\
& & 1 & 2{+}2 & 1 & & \\
& & & 1 & 2{+}2 & 1 & \\
& & & & 1 & 2{+}2 & 1 \\
& & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

断面積が一定でない場合

断面積 $A(x) = a - 2bx$ (a, b は正の定数で $A(L) > 0$ を満たす)

```
E = 2; rho = 1.0;
L = 10; a = 4; b = 0.1;
area = @(x) a - 2*b*x;

n = 4; h = L/n;
nodal = h*[0:n];

N = @(i,j,x) (x-nodal(j))/(nodal(i)-nodal(j));
ANiipNjjp = @(x, i, ip, j, jp) area(x).*N(i,ip,x).*N(j,jp
M = zeros(n+1,n+1);
for i=1:n
    Vsii =   integral(@(x) ANiipNjjp(x, i, i+1, i, i+1), 
    Vsiip =  integral(@(x) ANiipNjjp(x, i, i+1, i+1, i), 
    Vsipip = integral(@(x) ANiipNjjp(x, i+1, i, i+1, i), 
    M(i:i+1,i:i+1) = M(i:i+1,i:i+1) + rho*[ Vsii, Vsiip; 
```


断面積が一定でない場合

```
>> irregular_beam

M =

    3.2292    1.5625         0         0         0
    1.5625    5.8333    1.3542         0         0
         0    1.3542    5.0000    1.1458         0
         0         0    1.1458    4.1667    0.9375
         0         0         0    0.9375    1.7708
```


ラグランジアン

ラグランジアン

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}, \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}) &= T - U + W + \lambda R \\
&= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}^{\top} M \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}^{\top} K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{f}^{\top} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} + \lambda \boldsymbol{a}^{\top} \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$

ラグランジュの運動方程式

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}} = -K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{f} + \lambda \boldsymbol{a} - M \ddot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}
$$

制約安定化

$$R = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N}$$
$$\dot{R} = \boldsymbol{a}^\top \dot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N}$$
$$\ddot{R} = \boldsymbol{a}^\top \ddot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{a}^\top \ddot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} + 2\alpha \boldsymbol{a}^\top \dot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} + \alpha^2 \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}_\mathrm{N} = 0$$

常微分方程式

$$M \ddot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} - \lambda \boldsymbol{a} = -K \boldsymbol{u}_\mathrm{N} + \boldsymbol{f}$$
$$-\boldsymbol{a}^\top \ddot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{a}^\top (2\alpha \dot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} + \alpha^2 \boldsymbol{u}_\mathrm{N})$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\boldsymbol{u}}_\mathrm{N} = \boldsymbol{v}_\mathrm{N}$$
$$\begin{bmatrix} M & -\boldsymbol{a} \\ -\boldsymbol{a}^\top & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_\mathrm{N} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K \boldsymbol{u}_\mathrm{N} + \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{a}^\top (2\alpha \boldsymbol{v}_\mathrm{N} + \alpha^2 \boldsymbol{u}_\mathrm{N}) \end{bmatrix}$$

beam_dynamic_equation_param.m

```
function dotq = beam_dynamic_equation_param (t,q, n,M,B,K,a,al
% ビームの運動方程式
    un = q(1:n+1);
    vn = q(n+2:2*(n+1));

    f = zeros(n+1,1);
    f(n+1) = beam_dynamic_external_force(t);

    mat = [ M,  -a; ...
           -a',   0 ];
    vec = [ -K*un-B*vn+f; ...
            a'*(2*alpha*vn + (alpha^2)*un) ];
    sol = mat \ vec;
    dotvn = sol(1:n+1);

    dotq = [ vn; dotvn ];
end
```


beam_dynamic_external_force.m

```
function f = beam_dynamic_external_force (t)
% ビームに作用する外力
    % 正弦波
    %f = 5 * sin(2*pi*t);
    % ステップ
    f = 5 * (t <= 2);
end
```


サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
% ビームの動的変形（断面積一定）

L = 10; A = 2;
n = 6; h = L/n;
E = 200; % 弾性率（ヤング率）
c = 10;  % 粘性率
rho = 0.5; % 密度
alpha = 2000; % 制約安定化法
tf = 20.0; % シミュレーションの終端時刻

e0 = (4/6)*ones(n+1,1);
e0(1) = (2/6); e0(n+1) = (2/6);
e1 = (1/6)*ones(n+1,1);
M = (rho*A*h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角
行列
fprintf("慣性行列 M\n");
full(M)
```


サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
e0 = 2*ones(n+1,1);
e0(1) = 1; e0(n+1) = 1;
e1 = (-1)*ones(n+1,1);
K = (E*A/h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角行
列
fprintf("剛性行列 K\n");
full(K)

B = (c*A/h)*spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n+1, n+1); % 三重対角行
列
fprintf("粘性行列 B\n");
full(B)

a = zeros(n+1,1);
a(1) = 1;
fprintf("ベクトル a\n");
a
```

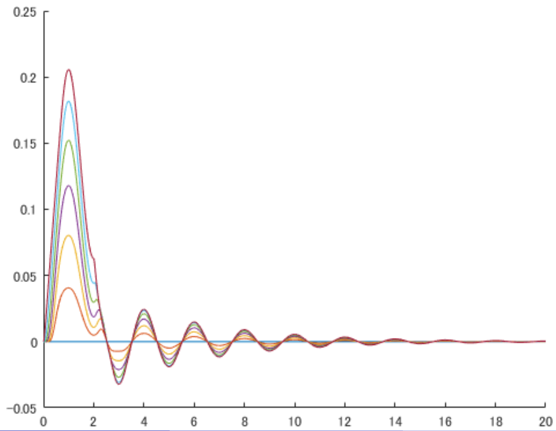

サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
beam_dynamic_equation = @(t,q) beam_dynamic_equation_param (t

interval = [0,tf];
qinit = [ zeros(n+1,1); zeros(n+1,1) ];
[time,q] = ode45(beam_dynamic_equation, interval, qinit);

clf;
plot(time, beam_dynamic_external_force(time));
fprintf("外力\n");
fprintf("一時停止：何かのキーを押してください\n");
pause;

clf;
hold on;
for k=1:n+1
    plot(time,q(:,k));
end
```


サンプルプログラム beam_dynamic.m

```
>> beam_dynamic
慣性行列 M
ans =
    0.5556    0.2778         0         0         0         0
    0.2778    1.1111    0.2778         0         0         0
         0    0.2778    1.1111    0.2778         0         0
         0         0    0.2778    1.1111    0.2778         0
         0         0         0    0.2778    1.1111    0.2778
         0         0         0         0    0.2778    1.1111
         0         0         0         0         0    0.2778

剛性行列 K
ans =
   240  -240     0     0     0     0     0
  -240   480  -240     0     0     0     0
     0  -240   480  -240     0     0     0
     0     0  -240   480  -240     0     0
```

サンプルプログラム beam_dynamic.m



まとめ

有限要素法

- エネルギーの積分表現
- エネルギーを有限個の変数で近似

ビームの変形

- ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの近似

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}{}^{\top} K \boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}, \quad T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}{}^{\top} M \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{N}}$$

- 静的な変形 $\Longrightarrow$ 釣り合いの方程式
- 動的な変形 $\Longrightarrow$ ラグランジュの運動方程式

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「有限要素法（一次元）」
締切：2024 年 7 月 15 日（月曜）00:10 AM

ベクトルに関する微分

ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

スカラー y のベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する微分

$$\frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

内積の微分

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

内積

$$y = \boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{x} = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = b_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = b_2, \quad \frac{\partial y}{\partial x_3} = b_3$$

内積の微分

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{b}^{\top}\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{b}$$

二次形式の微分

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

二次形式

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top} A \boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{2}\left\{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= \frac{1}{2}\left\{a_{11}\cdot 2x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3\right\} \\ &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \end{aligned}$$

二次形式の微分

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} &= a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

二次形式の微分

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top} A \boldsymbol{x}\right) = A\boldsymbol{x}$$