# 数値計算：常微分方程式

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科



## 講義の流れ

1. 常微分方程式の標準形
2. オイラー法，ホイン法，ルンゲ・クッタ法
3. ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法
4. 制約を有する常微分方程式
5. 制約安定化法
6. まとめ



## 標準形

時刻 $t$ に従う変数 $x, y$ に関する一階の常微分方程式

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y)$$

状態変数ベクトル

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

状態変数ベクトル $\boldsymbol{q}$ から，その時間微分 $\dot{\boldsymbol{q}} = [\dot{x}, \dot{y}]^\top$ を計算



## 標準形

ファイル name.m：標準形を記述

```
function dotq = name (t, q)
  x = q(1);
  y = q(2);
  dotx = f(x,y);
  doty = g(x,y);
  dotq = [dotx; doty];
end
```



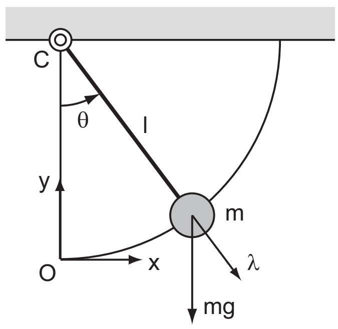
## 標準形

ファイル calc.m：標準形 name.m を数値的に解き，グラフを描く

```
interval = 0:0.001:4; % 固定ステップ
%interval = [0,4]; % 可変ステップ
qinit = [2;0];
[time, q] = ode45(@name, interval, qinit);

plot(time, q(:,1));    % t-x グラフ
pause;

plot(time, q(:,2));    % t-y グラフ
pause;

plot(q(:,1), q(:,2));  % x-y グラフ
pause;
```



## 単振り子






## 単振り子

$\theta$　時刻 $t$ における単振り子の振れ角

| | |
|---|---|
| 支点 C まわりの慣性モーメント | $J = ml^2$ |
| 重力により支点 C まわりに作用するモーメント | $-mgl\sin\theta$ |
| 振れ角の角加速度 | $\ddot{\theta}$ |

**支点 C まわりの回転に関する運動方程式**

$$J\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

$\Longrightarrow$ 変数 $\theta$ に関する二階の常微分方程式



## 単振り子

運動方程式を一階の微分方程式に変換

新しい変数 $\omega \triangleq \dot{\theta}$ を導入

$$J\dot{\omega} = -mgl\sin\theta$$

新しい変数 $\omega$ の定義式と上式の両辺を $J = ml^2$ で割った式

$$\dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\Longrightarrow$ 二つの変数 $\theta$ と $\omega$ に関する一階の微分方程式

# 標準形

## 常微分方程式の標準形

$$\dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

変数 $\theta$ と $\omega$ の値を与える．

$$\Downarrow$$

状態変数の時間微分 $\dot{\theta}$ と $\dot{\omega}$ の値を計算できる．



# 標準形

状態変数ベクトル

$$\boldsymbol{q} \triangleq \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

ベクトル値関数

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{g}{l}\sin\theta \end{bmatrix}$$

常微分方程式の標準形

$$\dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q})$$



# 標準形

## 常微分方程式を数値的に解く

Step 1　常微分方程式を標準形に変換
Step 2　変換した標準形をアルゴリズムに適用
(ルンゲ・クッタ法，ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法など)

標準形に変換すれば，既存のソフトウェアを用いることができる



# MATLAB

関数ファイル pendulum_ode.m

```
function dotq = pendulum_ode(t, q)
    global len;
    global grav;

    theta = q(1);
    omega = q(2);

    dottheta = omega;
    dotomega = -(grav/len)*sin(theta);

    dotq = [dottheta; dotomega];
end
```



# MATLAB

スクリプトファイル pendulum.m

```
global len;
global mass;
global grav;

len = 2.0;
mass = 0.01;
grav = 9.8;

interval = 0:0.1:10; % 固定ステップ
qinit = [pi/3; 0]; % 初期値
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```



# MATLAB

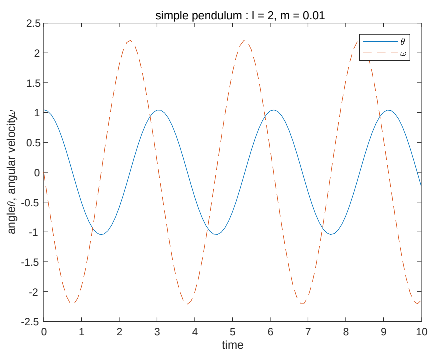
スクリプトファイル pendulum.m

```
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);

plot(time,q(:,1),time,q(:,2),'--');
title(['simple pendulum : l = ', num2str(len), ', m = ', :
xlabel('time');
ylabel('angle \theta, angular velocity \omega');
legend('\theta', '\omega');
```



# MATLAB

```
>> pendulum
```






# MATLAB

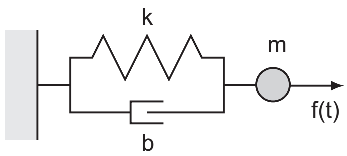
```
>> time

time =

         0
    0.1000
    0.2000
    0.3000
    0.4000
    0.5000
    0.6000
    0.7000
    0.8000
    0.9000
    1.0000
    1.1000
```

# MATLAB

```
>> q

q =

    1.0472         0
    1.0260   -0.4226
    0.9630   -0.8343
    0.8600   -1.2228
    0.7199   -1.5715
    0.5476   -1.8619
    0.3500   -2.0750
    0.1356   -2.1942
   -0.0852   -2.2071
   -0.3019   -2.1117
   -0.5043   -1.9174
   -0.6829   -1.6427
```



# 質点・バネ・ダンパー系




運動方程式

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + f(t)$$



# 質点・バネ・ダンパー系

新しい変数

$$v \triangleq \dot{x}$$

運動方程式

$$m\dot{v} = -bv - kx + f(t)$$

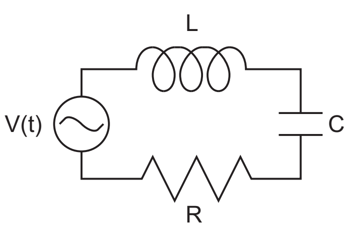
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= -bv - kx + f(t) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 二つの変数 $x$ と $v$ に関する一階の微分方程式



# LCR 回路




回路方程式

$$V(t) - L\dot{i} - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau - Ri = 0$$



# LCR 回路

新しい変数

$$q(t) \triangleq \int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

上式を時間微分

$$\dot{q} = i$$

回路方程式

$$V(t) - L\dot{i} - \frac{1}{C}q - Ri = 0$$

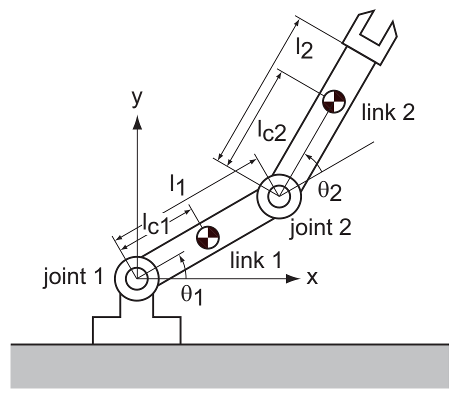
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= i \\ L\dot{i} &= -Ri - \frac{1}{C}q + V(t) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ 二つの変数 $q$ と $i$ に関する一階の微分方程式



# ロボットアーム






# ロボットアーム

## ロボットアームの運動方程式

$$\begin{aligned} H_{11}\ddot{\theta}_1 + H_{12}\ddot{\theta}_2 &= h_{12}\dot{\theta}_2^2 + 2h_{12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1 \\ H_{22}\ddot{\theta}_2 + H_{12}\ddot{\theta}_1 &= -h_{12}\dot{\theta}_1^2 - G_{12} + \tau_2 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} H_{11} &= J_1 + m_1 l_{c1}^2 + J_2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}\cos\theta_2) \\ H_{12} &= J_2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2}\cos\theta_2) \\ H_{22} &= J_2 + m_2 l_{c2}^2 \\ h_{12} &= m_2 l_1 l_{c2}\sin\theta_2 \\ G_1 &= (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)\, g\cos\theta_1 \\ G_{12} &= m_2 l_{c2}\, g\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$



# ロボットアーム

$\omega_1 \triangleq \dot{\theta}_1$, $\omega_2 \triangleq \dot{\theta}_2$

## 常微分方程式の標準形

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{12}\omega_2^2 + 2h_{12}\omega_1\omega_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1 \\ -h_{12}\omega_1^2 - G_{12} + \tau_2 \end{bmatrix}$$

変数 $\theta_1$, $\theta_2$, $\omega_1$, $\omega_2$ の値を与える．
$\Longrightarrow$ 上式左辺の行列の要素と右辺のベクトルの要素の値を計算．
$\Longrightarrow$ 連立一次方程式を解き時間微分 $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\omega}_2$ の値を計算する．

## ロボットアーム

状態変数ベクトル

$$\boldsymbol{q} \triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

常微分方程式の標準形

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q})$$



## 常微分方程式の標準形

- 状態変数に関する一階の微分方程式
- 状態変数の値を与えると，その時間微分の値を計算できる．
- 時間微分の値が一意に決まる．



## 常微分方程式の標準形

標準形か否かを判定せよ．

(a) $\dot{x} = 3\sqrt{x}$

(b) $\dot{x}^2 = 9x$

(c) $\dot{x}^2 = 9x \quad (\dot{x} \leq 0)$

(d) $\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = x \\ \dot{x} - \dot{y} = y \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \dot{x} - 2\dot{y} = x \\ -2\dot{x} + 4\dot{y} = y \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2\dot{x} + p = x \\ 2\dot{y} + 3p = y \\ \dot{x} + 3\dot{y} = x - y \end{cases}$



## 常微分方程式の数値解法

常微分方程式 (1 変数) の標準形

$$\dot{x} = f(t, x)$$

を数値的に解く．

### 微分方程式を数値的に解く

離散的な時刻 $t_n = nT$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ における $x$ の値を求める．
ステップ幅 $T$：時間間隔を表す定数



## 常微分方程式の数値解法

| | |
|---|---|
| オイラー法 | (Euler method) |
| ホイン法 | (Heun method) |
| ルンゲ・クッタ法 | (Runge-Kutta method) |

時刻 $t_n$ における $x$ の値 $x_n = x(t_n)$

$$\Downarrow$$

時刻 $t_{n+1}$ における $x$ の値 $x_{n+1} = x(t_{n+1})$ を計算する漸化式

常微分方程式の初期値 $x_0 = x(0)$ から始めて漸化式を繰り返し適用
順次 $x_n = x(nT)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ の値を求める．



## 常微分方程式の数値解法

微分方程式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -2x$ をオイラー法で数値的に解く
初期値 $x(0) = 1.00$，ステップ幅 0.1

| $t$ | $x$ |
|---|---|
| 0.000000 | 1.000000 |
| 0.100000 | 0.818567 |
| 0.200000 | 0.670052 |
| 0.300000 | 0.548482 |
| 0.400000 | 0.448969 |
| 0.500000 | 0.367511 |
| 0.600000 | 0.300833 |
| 0.700000 | 0.246252 |
| 0.800000 | 0.201573 |
| 0.900000 | 0.165001 |
| 1.000000 | 0.135065 |



## 常微分方程式の数値解法

### 長所

- 解析的に解けない微分方程式を解くことができる
- シミュレーション（力学，回路，CG）

### 短所

- 方法によって解が異なる
- ステップ幅によって解が異なる

| | |
|---|---|
| ステップ幅が大きい | 計算した解が誤っている |
| ステップ幅が小さい | 計算時間が要する |

ステップ幅を小さく (たとえば半分) にして解が一致

$$\Downarrow$$

もとのステップ幅で計算してよい．



## オイラー法

### オイラー法

$$x_{n+1} = x_n + Tf(t_n, x_n)$$

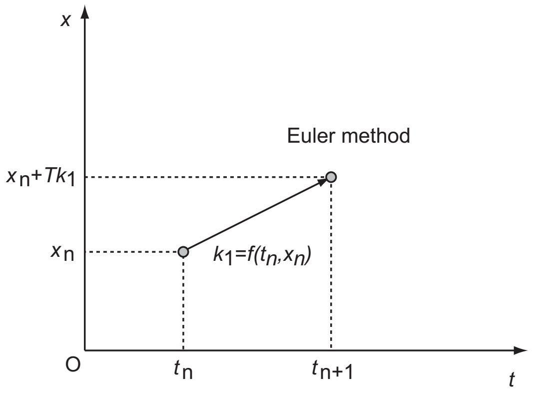
1 段解法　$t$ と $x$ の一つの組 $(t_n, x_n)$ で $f(t, x)$ を計算

$x_{n+1} = x((n+1)T) = x(nT + T) = x(t_n + T)$ を一次の項まで展開

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x(t_n) + \dot{x}(t_n)T \\ &= x(t_n) + f(t_n, x(t_n))T \\ &= x_n + Tf(t_n, x_n) \end{aligned}$$

オイラー法の両辺は一次のオーダまで一致

## オイラー法






## ホイン法

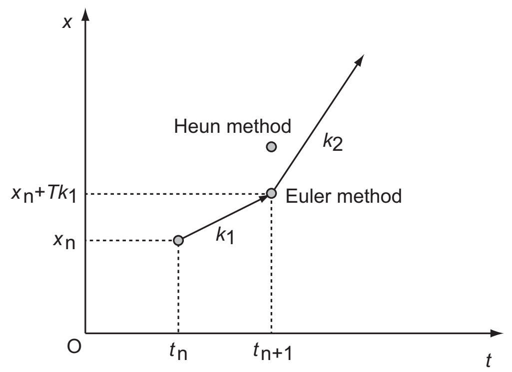
**ホイン法**

$$x_{n+1} = x_n + \frac{T}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = f(t_n, x_n)$$
$$k_2 = f(t_n + T, x_n + Tk_1)$$

2 段解法　二つの組 $(t_n, x_n)$ と $(t_n + T, x_n + Tk_1)$ で $f(t, x)$ を計算



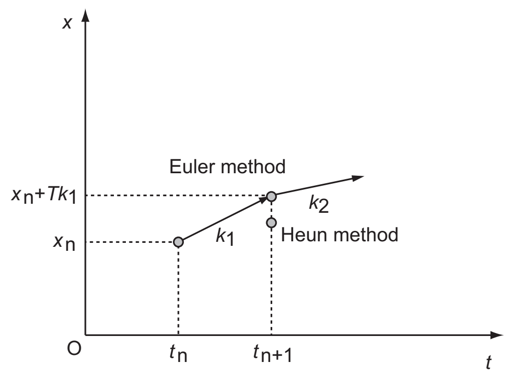
## ホイン法




$k_1 < k_2$ のとき $\ddot{x} > 0$



## ホイン法




$k_1 > k_2$ のとき $\ddot{x} < 0$



## ホイン法

$x_{n+1} = x(t_n + T)$ を二次の項まで展開

$$x_{n+1} = x(t_n) + \dot{x}(t_n)T + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_n)T^2$$

$\dot{x} = f(t, x)$ の両辺を時間微分

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} = f_t + f_x f$$

ホイン法の左辺

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n)T + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)\,T^2$$



## ホイン法

$k_2$ を展開

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_n + T, x_n + Tk_1) = f(t_n, x_n) + f_t T + f_x Tk_1 \\ &= f + (f_t + f_x f)T \end{aligned}$$

ホイン法の右辺

$$\begin{aligned} x_n + \frac{T}{2}(k_1 + k_2) &= x_n + \frac{T}{2}(f + f + (f_t + f_x f)T) \\ &= x_n + fT + \frac{1}{2}(f_t + f_x f)\,T^2 \end{aligned}$$

ホイン法の両辺は二次のオーダまで一致



## ルンゲ・クッタ法

**ルンゲ・クッタ法**

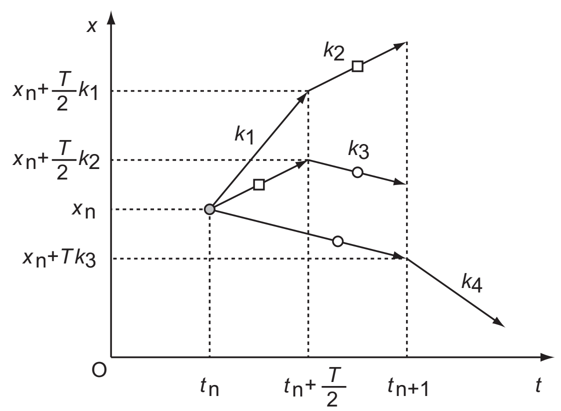
$$x_{n+1} = x_n + \frac{T}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(t_n, x_n)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}T, x_n + \frac{1}{2}Tk_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{1}{2}T, x_n + \frac{1}{2}Tk_2\right)$$
$$k_4 = f(t_n + T, x_n + Tk_3)$$

4 段解法　$t$ と $x$ の四つの組で $f(t, x)$ を計算

ルンゲ・クッタ法の両辺は四次のオーダまで一致



## ルンゲ・クッタ法



## 階数とオーダ

| 階数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| オーダ | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 |

階数 1：オイラー法
階数 2：ホイン法
階数 4：ルンゲ・クッタ法

階数 5 以上ではオーダは階数に達しない



## 常微分方程式の数値解法

常微分方程式 (多変数) の標準形

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q})$$

を数値的に解く.

$$\Downarrow$$

オイラー法，ホイン法，ルンゲ・クッタ法の漸化式で

状態変数 $x \Longrightarrow$ 状態変数ベクトル $\boldsymbol{q}$
スカラー関数 $f \Longrightarrow$ ベクトル関数 $\boldsymbol{f}$
スカラー $k \Longrightarrow$ ベクトル $\boldsymbol{k}$



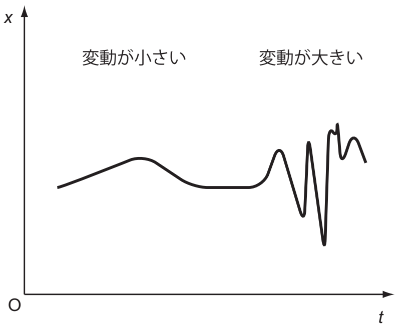
## ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

$\left.\begin{array}{l}\text{オイラー法}\\ \text{ホイン法}\\ \text{ルンゲ・クッタ法}\end{array}\right\}$ ステップ幅固定

ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法 $\rightarrow$ ステップ幅可変



## ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法




変動が小さい：大きいステップ幅
変動が大きい：小さいステップ幅



## ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

6 段階法

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{4}T, x_n + \frac{T}{4}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3}{8}T, x_n + \frac{T}{32}(3k_1 + 9k_2)\right)$$
$$k_4 = f\left(t_n + \frac{12}{13}T, x_n + \frac{T}{2179}(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)\right)$$
$$k_5 = f\left(t_n + T, x_n + T\left(\frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)\right)$$
$$k_6 = f\left(t_n + \frac{1}{2}T, x_n + T\left(-\frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)\right)$$



## ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

5 次のオーダの解

$$x_{n+1} = x_n + T\left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right)$$

4 次のオーダの解

$$x^*_{n+1} = x_n + T\left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5\right)$$

変動が小さい：$x_{n+1}$ と $x^*_{n+1}$ の差が小さい $\rightarrow$ 大きいステップ幅
変動が大きい：$x_{n+1}$ と $x^*_{n+1}$ の差が大きい $\rightarrow$ 小さいステップ幅



## ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

### ルンゲ・クッタ・フェールベルグ公式

Step 1 5 次のオーダの解 $x_{n+1}$ を計算する.
Step 2 4 次のオーダの解 $x^*_{n+1}$ を計算する.
Step 3 次式で表される $\hat{T}$ を計算する.

$$\hat{T} = \alpha T \left\{\frac{\epsilon}{\|x_{n+1} - x^*_{n+1}\|}\right\}^{\frac{1}{5}}$$

$\epsilon$ は許容量を表す小さい正の定数，$\alpha$ は安全率で 0.8 から 0.9 の範囲から選ぶ.

Step 4 時間ステップ $T$ の値を $\hat{T}$ 以下で選ぶ.



## MATLAB

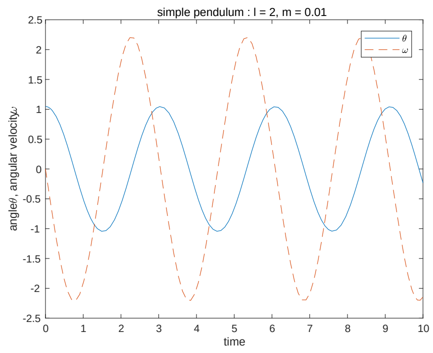
スクリプトファイル pendulum.m

```
interval = 0:0.1:10; % 固定ステップ
qinit = [pi/3; 0]; % 初期値
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```

可変ステップを指定

```
interval=[0,10]; % 可変ステップ
qinit = [pi/3; 0]; % 初期値
[time, q] = ode45(@pendulum_ode, interval, qinit);
```

## MATLAB






## MATLAB

```
>> time
time =
          0
     0.0000
     0.0000
     0.0000
     0.0000
     0.0001
     0.0002
     0.0002
     0.0003
     0.0006
     0.0009
     0.0012
     0.0015
     0.0029
```



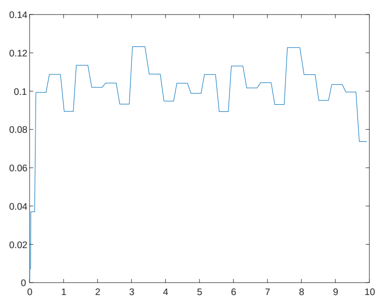
## MATLAB

```
>> q
q =
     1.0472          0
     1.0472    -0.0001
     1.0472    -0.0001
     1.0472    -0.0002
     1.0472    -0.0002
     1.0472    -0.0005
     1.0472    -0.0007
     1.0472    -0.0010
     1.0472    -0.0012
     1.0472    -0.0025
     1.0472    -0.0037
     1.0472    -0.0050
     1.0472    -0.0062
     1.0472    -0.0125
```



## MATLAB

```
>> sz = size(time); n = sz(1);
>> dtime = time(2:n) - time(1:n-1);
>> plot(time(1:n-1), dtime)
```





## 講義の目標

**講義の内容**

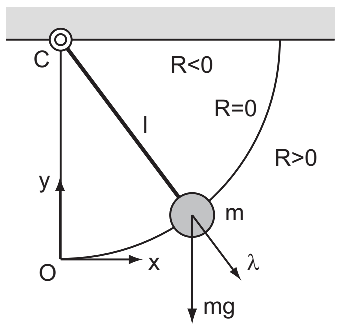
制約を有する常微分方程式
制約安定化法

**講義の目標**

制約を有する常微分方程式を理解する
制約安定化法で標準形に変換できる



## 単振り子 (直交座標)






## 単振り子 (直交座標)

時刻 $t$ における質点の位置　$(x, y)$

**制約**

振り子の支点 C から質点までの距離は $l$ に等しい．

$$R(x, y) \triangleq \{x^2 + (y - l)^2\}^{(1/2)} - l = 0$$

$R(x, y)$：長さの次元．軌道円の外側で正，内側で負の値．

勾配ベクトル $[\, R_x,\, R_y \,]^\top$

$$R_x(x, y) \triangleq \frac{\partial R}{\partial x} = x \{x^2 + (y - l)^2\}^{(-1/2)}$$
$$R_y(x, y) \triangleq \frac{\partial R}{\partial y} = (y - l) \{x^2 + (y - l)^2\}^{(-1/2)}$$

制約式 $R(x, y) = 0$ が表す円軌跡の外向き法線ベクトル



## 単振り子 (直交座標)

張力の方向　勾配ベクトル $[\, R_x,\, R_y \,]^\top$
張力の大きさ　未知数 $\lambda$

**質点の運動方程式**

$$m\ddot{x} = \lambda\, R_x(x, y)$$
$$m\ddot{y} = \lambda\, R_y(x, y) - mg$$

ただし

$$R(x, y) = 0$$

## 単振り子 (直交座標)

$v_x \triangleq \dot{x}$，$v_y \triangleq \dot{y}$

### 制約付きの常微分方程式

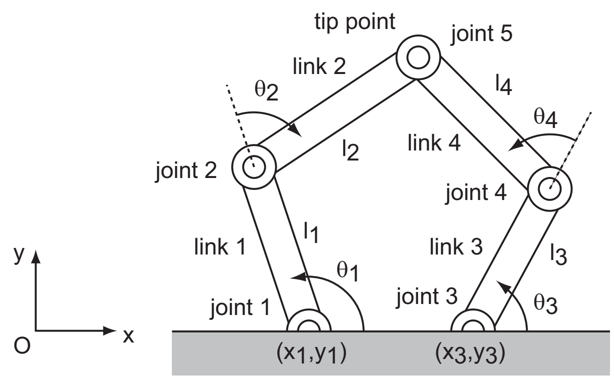
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v_x \\
\dot{y} &= v_y \\
m\dot{v}_x &= \lambda\, R_x(x,y) \\
m\dot{v}_y &= \lambda\, R_y(x,y) - mg \\
R(x,y) &= 0
\end{aligned}
$$

未知変数：$x$，$y$，$v_x$，$v_y$，$\lambda$

4 個の常微分方程式と 1 個の代数方程式

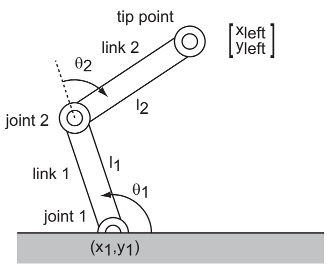


## 閉リンク機構

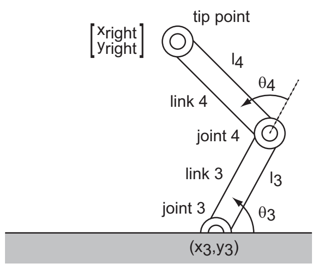





## 閉リンク機構




左アーム




右アーム



## 閉リンク機構

左アームの端点の座標

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} C_{1+2} \\ S_{1+2} \end{bmatrix}
$$

$$\|$$

右アームの端点の座標

$$
\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + l_3 \begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} + l_4 \begin{bmatrix} C_{3+4} \\ S_{3+4} \end{bmatrix}
$$

### 制約

$$
\begin{aligned}
X(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) &\triangleq l_1 C_1 + l_2 C_{1+2} - l_3 C_3 - l_4 C_{3+4} + x_1 - x_3 = 0 \\
Y(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) &\triangleq l_1 S_1 + l_2 S_{1+2} - l_3 S_3 - l_4 S_{3+4} + y_1 - y_3 = 0
\end{aligned}
$$



## 閉リンク機構

### 運動方程式

$$
\begin{aligned}
H_{11}\dot{\omega}_1 + H_{12}\dot{\omega}_2 &= f_1 + \lambda_x(-l_1 S_1 - l_2 S_{1+2}) + \lambda_y(l_1 C_1 + l_2 C_{1+2}) \\
H_{22}\dot{\omega}_2 + H_{12}\dot{\omega}_1 &= f_2 + \lambda_x(-l_2 S_{1+2}) + \lambda_y l_2 C_{1+2} \\
H_{33}\dot{\omega}_3 + H_{34}\dot{\omega}_4 &= f_3 + \lambda_x(l_3 S_3 + l_2 S_{3+4}) + \lambda_y(-l_3 C_3 - l_4 C_{3+4}) \\
H_{44}\dot{\omega}_4 + H_{34}\dot{\omega}_3 &= f_4 + \lambda_x l_4 S_{3+4} + \lambda_y(-l_4 C_{3+4})
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
f_1 &= h_{12}\omega_2^2 + 2h_{12}\omega_1\omega_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1, \quad & f_2 &= -h_{12}\omega_1^2 - G_{12} \\
f_3 &= h_{34}\omega_4^2 + 2h_{34}\omega_3\omega_4 - G_3 - G_{34} + \tau_3, \quad & f_4 &= -h_{34}\omega_3^2 - G_{34}
\end{aligned}
$$



## 閉リンク機構

### 制約付きの常微分方程式

$$
\begin{aligned}
&\dot{\theta}_1 = \omega_1, \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2, \quad \dot{\theta}_3 = \omega_3, \quad \dot{\theta}_4 = \omega_4 \\
&H_{11}\dot{\omega}_1 + H_{12}\dot{\omega}_2 = f_1 + \lambda_x(-l_1 S_1 - l_2 S_{1+2}) + \lambda_y(l_1 C_1 + l_2 C_{1+2}) \\
&H_{22}\dot{\omega}_2 + H_{12}\dot{\omega}_1 = f_2 + \lambda_x(-l_2 S_{1+2}) + \lambda_y l_2 C_{1+2} \\
&H_{33}\dot{\omega}_3 + H_{34}\dot{\omega}_4 = f_3 + \lambda_x(l_3 S_3 + l_2 S_{3+4}) + \lambda_y(-l_3 C_3 - l_4 C_{3+4}) \\
&H_{44}\dot{\omega}_4 + H_{34}\dot{\omega}_3 = f_4 + \lambda_x l_4 S_{3+4} + \lambda_y(-l_4 C_{3+4}) \\
&X(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = 0 \\
&Y(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = 0
\end{aligned}
$$

未知変数：$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$，$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$，$\lambda_x$，$\lambda_y$

8 個の常微分方程式と 2 個の代数方程式



## 制約安定化法

代数方程式

$$R = 0$$

$$\Downarrow$$

微分方程式

$$\ddot{R} + 2\alpha\dot{R} + \alpha^2 R = 0$$

$\alpha$：あらかじめ定める大きい正の定数

数値計算の過程で幾何制約 $R$ が破られる．

$\Longrightarrow$ 上式 (臨界減衰の式) により $R$ の値は再び 0 に収束

$\Longrightarrow$ 結果的に制約式 $R = 0$ が保たれる．



## 制約安定化法

$R(x,y)$ の時間微分 $\dot{R}$

$$
\begin{aligned}
\dot{R} &= \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= R_x\dot{x} + R_y\dot{y}
\end{aligned}
$$

偏微分 $R_x(x,y)$ の時間微分

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_x &= \frac{\partial R_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial R_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= R_{xx}\dot{x} + R_{xy}\dot{y}
\end{aligned}
$$

偏微分 $R_y(x,y)$ の時間微分

$$
\begin{aligned}
\dot{R}_y &= \frac{\partial R_y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial R_y}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= R_{yx}\dot{x} + R_{yy}\dot{y}
\end{aligned}
$$

# 制約安定化法

$R(x,y)$ の二階時間微分 $\ddot{R}$

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= \dot{R}_x\dot{x} + R_x\ddot{x} + \dot{R}_y\dot{y} + R_y\ddot{y}\\ &= R_x\ddot{x} + R_y\ddot{y} + (R_{xx}\dot{x} + R_{xy}\dot{y})\dot{x} + (R_{yx}\dot{x} + R_{yy}\dot{y})\dot{y}\\ &= R_x\ddot{x} + R_y\ddot{y} + \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy}\\ R_{yx} & R_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\ddot{R} + 2\alpha\dot{R} + \alpha^2 R = 0$$
$$\Downarrow$$
$$-R_x\ddot{x} - R_y\ddot{y} = C(x,y,\dot{x},\dot{y})$$

ただし

$$C(x,y,\dot{x},\dot{y}) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy}\\ R_{yx} & R_{yy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} + 2\alpha(R_x\dot{x} + R_y\dot{y}) + \alpha^2 R$$



# 制約安定化法

単振り子 (直交座標)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda\, R_x(x,y)\\ m\ddot{y} &= \lambda\, R_y(x,y) - mg\\ R(x,y) &= 0\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x\\ \dot{y} &= v_y\\ m\dot{v}_x - \lambda\, R_x(x,y) &= 0\\ m\dot{v}_y - \lambda\, R_y(x,y) &= -mg\\ -R_x\dot{v}_x - R_y\dot{v}_y &= C(x,y,v_x,v_y)\end{aligned}$$

未知変数：$x$，$y$，$v_x$，$v_y$，$\lambda$

5 個の常微分方程式



# 制約安定化法

$$P(x,y) \triangleq \{x^2 + (y-l)^2\}^{(-1/2)}$$

偏微分を計算

$$R_x = xP, \quad R_y = (y-l)P$$
$$R_{xx} = P - x^2P^3, \quad R_{yy} = P - (y-l)^2P^3, \quad R_{xy} = -x(y-l)P^3$$



# 制約安定化法

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x - \lambda\, R_x(x,y) &= 0\\ m\dot{v}_y - \lambda\, R_y(x,y) &= -mg\\ -R_x\dot{v}_x - R_y\dot{v}_y &= C(x,y,v_x,v_y)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & -R_x\\ 0 & m & -R_y\\ -R_x & -R_y & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ -mg\\ C(x,y,v_x,v_y)\end{bmatrix}$$

状態変数 $x$, $y$, $v_x$, $v_y$ の値を与える．

$\Longrightarrow$ 上式左辺の行列の要素と右辺のベクトルの要素の値を計算．

$\Longrightarrow$ 連立一次方程式を解き時間微分 $\dot{v}_x$, $\dot{v}_y$ の値を計算する．



# 制約安定化法

状態変数ベクトル

$$\boldsymbol{q} \triangleq \begin{bmatrix} x\\ y\\ v_x\\ v_y\end{bmatrix}$$

常微分方程式の標準形

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{q})$$



# MATLAB

$m = 0.01$，$l = 2$，$g = 9.8$

初期値 $\theta(0) = (\pi/3)$，$\omega(0) = 0$ に対応する初期値

$x(0) = l\sin\theta(0)$，$y(0) = l(1-\cos\theta(0))$，$v_x(0) = 0$，$v_y(0) = 0$

制約付きの常微分方程式を制約安定化法で標準形に変換

標準形をルンゲ・クッタ法で数値的に解く．



# MATLAB

関数ファイル pendulumCartesian_ode.m

```
function dotq = pendulumCartesian_ode (t, q)
% 単振り子　直交座標　標準形
global len;
global mass;
global grav;
global alpha;

x = q(1);
y = q(2);
vx = q(3);
vy = q(4);
```



# MATLAB

関数ファイル pendulumCartesian_ode.m

```
R = sqrt(x*x + (y-len)*(y-len)) - len;

P = 1/sqrt(x*x + (y-len)*(y-len));
Rx = x*P; Ry = (y-len)*P;
Rxx = P - x^2*P^3;
Ryy = P - (y-len)^2*P^3;
Rxy = -x*(y-len)*P^3;
C = Rxx*vx*vx + Ryy*vy*vy + 2*Rxy*vx*vy + 2*alpha*(Rx*vx
```

## MATLAB

関数ファイル pendulumCartesian_ode.m

```
A = [ mass, 0, -Rx;...
      0, mass, -Ry;...
      -Rx, -Ry,  0 ];
b = [ 0; -mass*grav; C ];
d = A\b;
dotvx = d(1);
dotvy = d(2);
dotq = [vx; vy; dotvx; dotvy];
end
```



## MATLAB

スクリプトファイル pendulumCartesian.m

```
global len;
global mass;
global grav;
global alpha;

len = 2.00;
mass = 0.01;
grav = 9.8;

alpha = 2000;
```



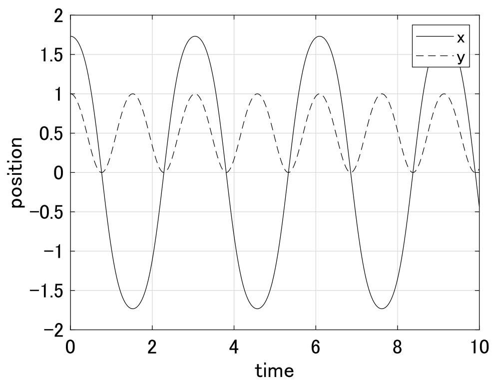
## MATLAB

スクリプトファイル pendulumCartesian.m

```
%interval=0:0.1:10; % 固定ステップ
interval = [0,10]; % 可変ステップ
thetainit = pi/3; % 初期角度
qinit = [len*sin(thetainit); len*(1-cos(thetainit)); 0; 0
[time, q] = ode45(@pendulumCartesian_ode, interval, qinit
```

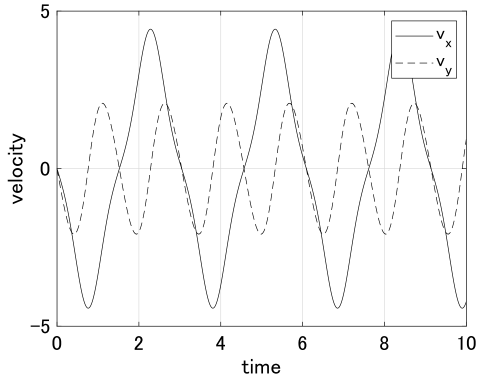


## MATLAB



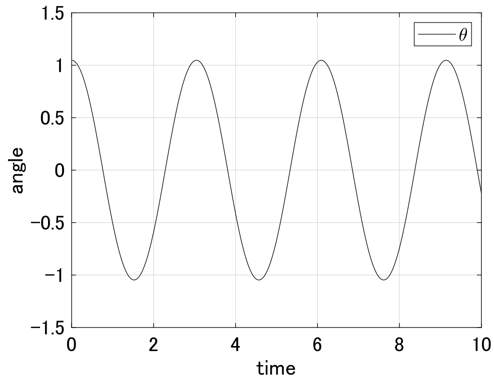



## MATLAB



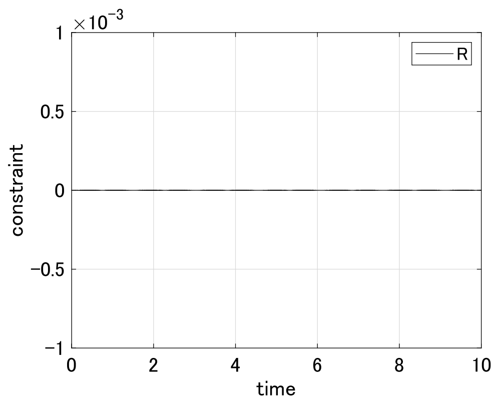



## MATLAB



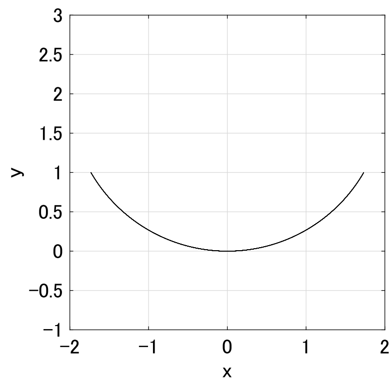



## MATLAB






## MATLAB



## まとめ

### 常微分方程式の標準形

- 状態変数に関する一階の微分方程式
- 状態変数の値を与えると，その時間微分を計算できる

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q})$$

### 常微分方程式の数値解法

- 標準形を数値的に解く
- ステップ幅固定：オイラー法，ホイン法，ルンゲ・クッタ法
- ステップ幅可変：ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

### 制約安定化法

- 制約式を微分方程式に変換



## レポート

次の問題に答え，pdf ファイルで manaba+R に提出する．

ファイル名：学籍番号（11 桁半角数字）名前（空白なし）.pdf
例えば　12345678901 平井慎一.pdf
12345678901HiraiShinichi.pdf
pdf ファイル以外は採点対象外
レポートにはグラフとプログラムを含める
ワードや写真のファイルは pdf に変換し，アップすること

締切：5 月 20 日（月曜）00:10 AM



## レポート

時刻 $t$ に依存する変数 $x, y, z$ に関する常微分方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -p(x - y) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned}$$

を，時間 $[0, 10]$ で解き，$x$（横軸）と $y$（縦軸）のグラフ，$x$（横軸）と $z$（縦軸）のグラフ，$y$（横軸）と $z$（縦軸）のグラフを示せ．ここで，$p = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$ は定数である．変数の初期値は，$[x(0), y(0), z(0)]^\top = [4, 4, 4]^\top$ とする．