

数値計算：補間

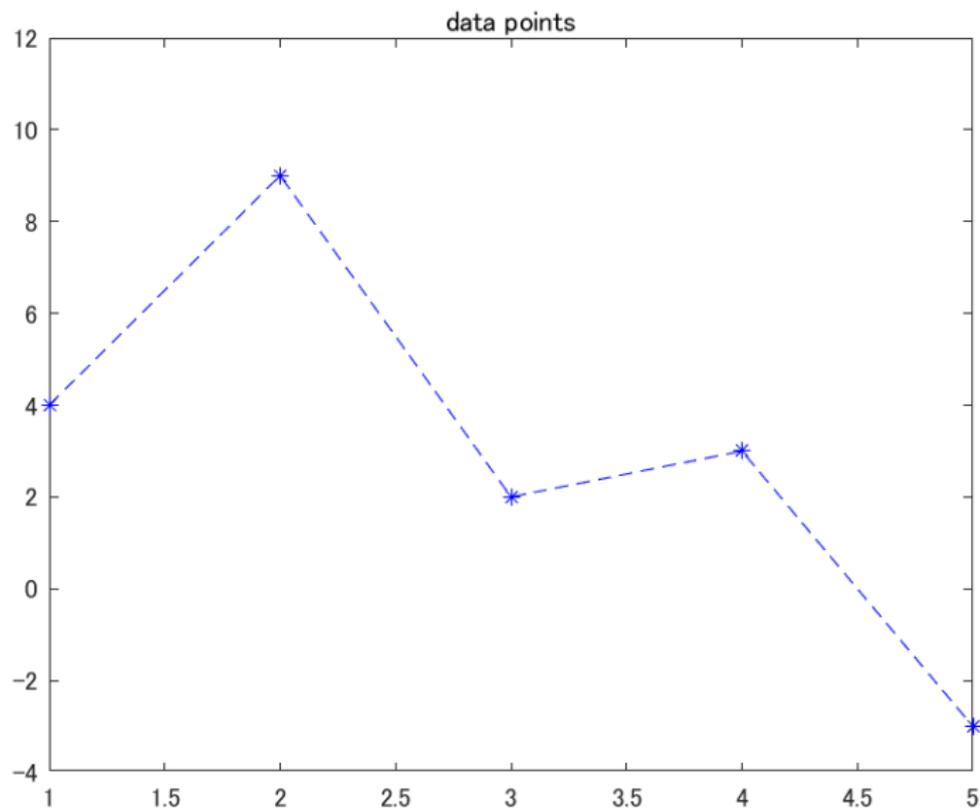
平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

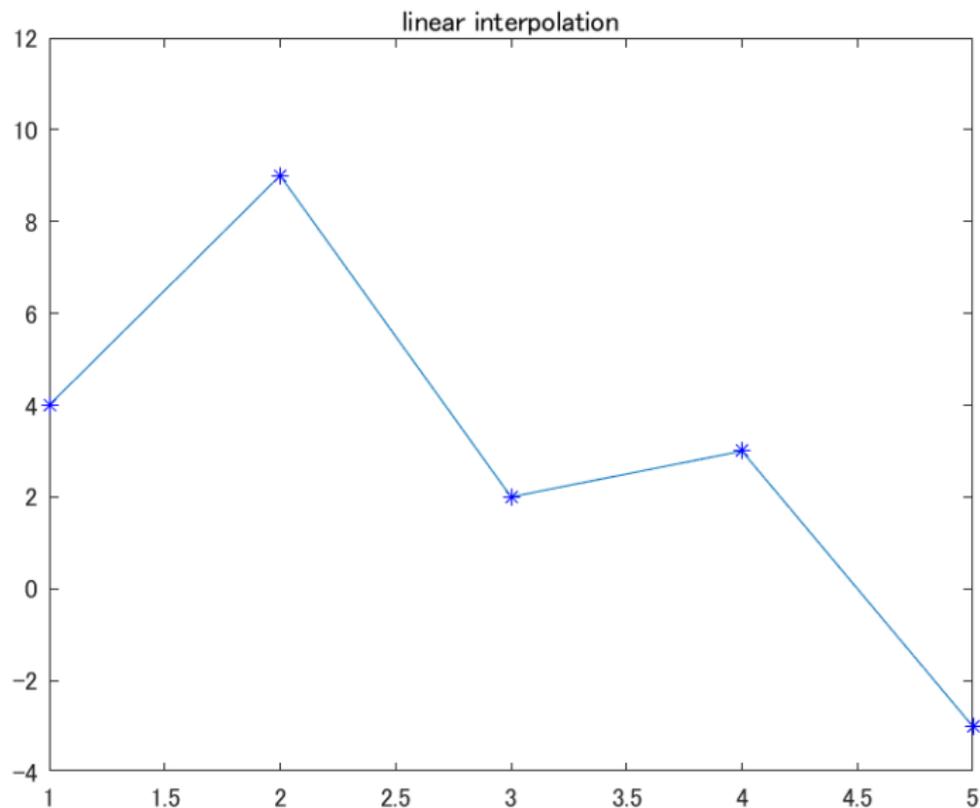
講義の流れ

- ① 区分線形補間
- ② スプライン補間
- ③ まとめ

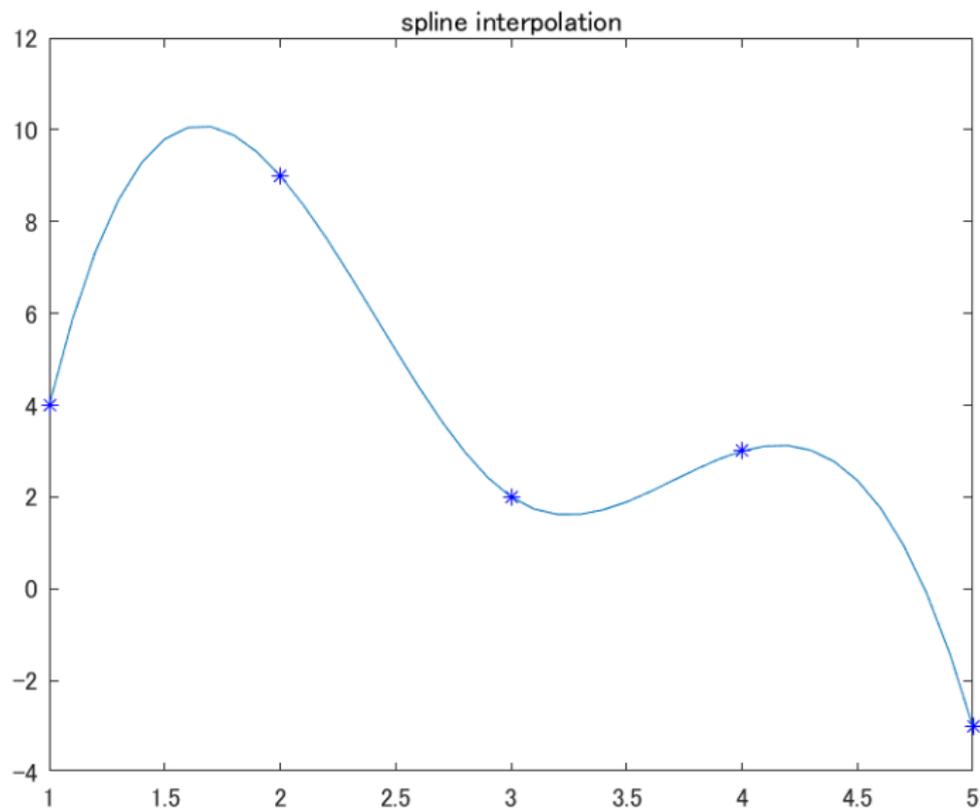
MATLAB



MATLAB



MATLAB



MATLAB

プログラム interp.m

```
x = 1:5';
```

```
y = [4; 9; 2; 3; -3];
```

```
xq = 1:0.1:5';
```

```
% 区分線形補間
```

```
yq = interp1(x, y, xq);
```

```
plot(xq, yq, x, y, 'b*');
```

```
% スプライン補間
```

```
yq = interp1(x, y, xq, 'spline');
```

```
plot(xq, yq, x, y, 'b*');
```

区分線形補間

変数 x の関数 $f(x)$ の値 : 離散点で与えられる

変数 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \implies$ 関数値 $f = f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$

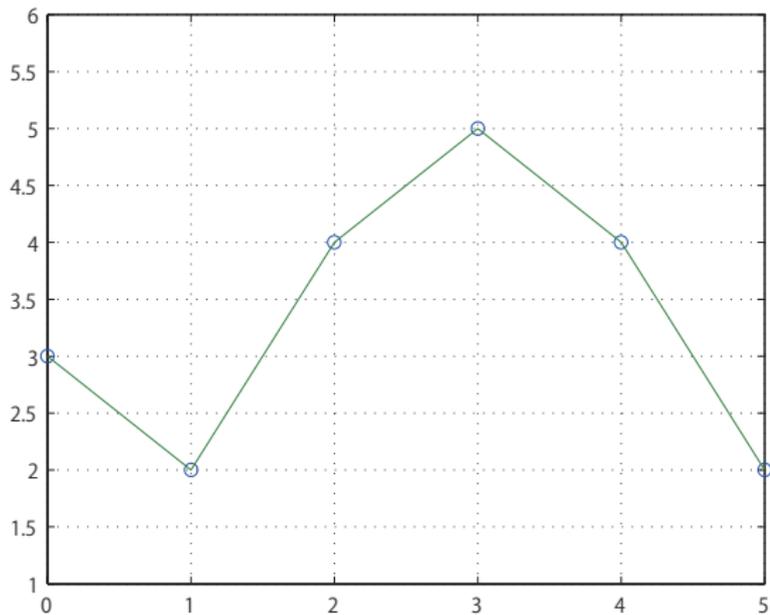
区分線形補間 (piecewise linear interpolation)

区間 $[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$: 関数値を一次式で表す

$$f(x) = \begin{cases} L_0(x) & x \in [0, 1] \\ L_1(x) & x \in [1, 2] \\ L_2(x) & x \in [2, 3] \\ L_3(x) & x \in [3, 4] \\ L_4(x) & x \in [4, 5] \end{cases}$$

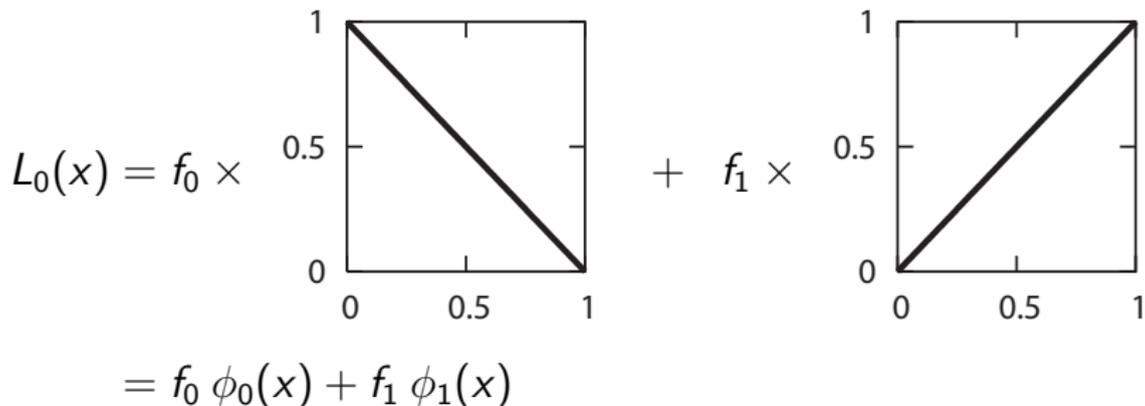
$L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_4(x)$: 一次式

区分線形補間



区分線形補間

一次関数 $L_0(x)$: $L_0(0) = f_0, L_0(1) = f_1$

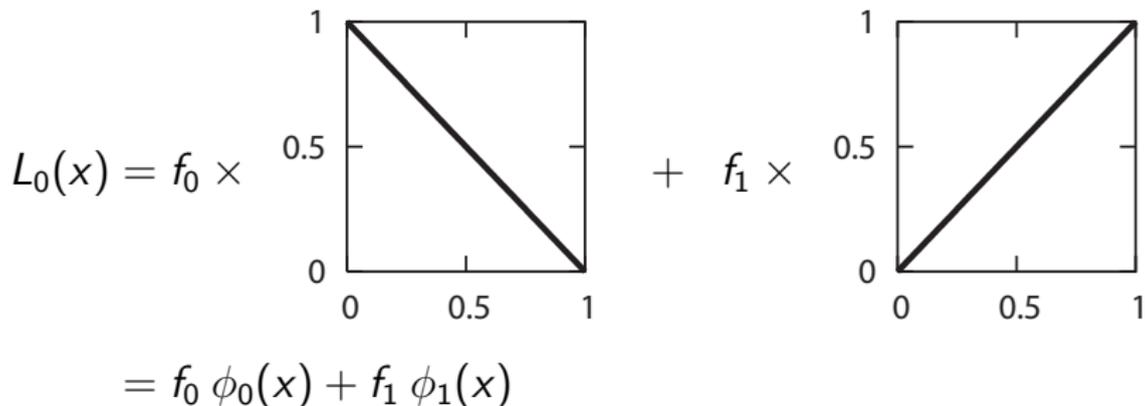


一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\begin{aligned}\phi_0(0) &= 1, & \phi_0(1) &= 0 \\ \phi_1(0) &= 0, & \phi_1(1) &= 1\end{aligned}$$

区分線形補間

一次関数 $L_0(x)$: $L_0(0) = f_0, L_0(1) = f_1$



一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\begin{aligned} \phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0 &\implies \phi_0(x) = 1 - x \\ \phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1 &\implies \phi_1(x) = x \end{aligned}$$

区分線形補間

一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ を 1 平行移動

$$\phi_0(x-1) = \begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (x=2) \end{cases}, \quad \phi_1(x-1) = \begin{cases} 0 & (x=1) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$$

$$L_1(1) = f_1, L_1(2) = f_2 \implies$$

$$L_1(x) = f_1 \phi_0(x-1) + f_2 \phi_1(x-1)$$

一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ を 2 平行移動

$$\phi_0(x-2) = \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (x=3) \end{cases}, \quad \phi_1(x-2) = \begin{cases} 0 & (x=2) \\ 1 & (x=3) \end{cases}$$

$$L_2(2) = f_2, L_2(3) = f_3 \implies$$

$$L_2(x) = f_2 \phi_0(x-2) + f_3 \phi_1(x-2)$$

区分線形補間

区分線形補間

$$L_0(x) = f_0 \phi_0(x - 0) + f_1 \phi_1(x - 0)$$

$$L_1(x) = f_1 \phi_0(x - 1) + f_2 \phi_1(x - 1)$$

$$L_2(x) = f_2 \phi_0(x - 2) + f_3 \phi_1(x - 2)$$

$$L_3(x) = f_3 \phi_0(x - 3) + f_4 \phi_1(x - 3)$$

$$L_4(x) = f_4 \phi_0(x - 4) + f_5 \phi_1(x - 4)$$

二変数関数の区分線形補間

点 $O(0, 0)$ 関数值 f_O

点 $A(1, 0)$ 関数值 f_A

点 $B(0, 1)$ 関数值 f_B

一次関数 $\phi_{0,0}(x, y), \phi_{1,0}(x, y), \phi_{0,1}(x, y)$:

$$\phi_{0,0}(0, 0) = 1, \quad \phi_{0,0}(1, 0) = 0, \quad \phi_{0,0}(0, 1) = 0$$

$$\phi_{1,0}(0, 0) = 0, \quad \phi_{1,0}(1, 0) = 1, \quad \phi_{1,0}(0, 1) = 0$$

$$\phi_{0,1}(0, 0) = 0, \quad \phi_{0,1}(1, 0) = 0, \quad \phi_{0,1}(0, 1) = 1$$

領域 $\triangle OAB$ における一次式 $L_{OAB}(x, y)$:

$$L_{OAB}(x, y) = f_O \phi_{0,0}(x, y) + f_A \phi_{1,0}(x, y) + f_B \phi_{0,1}(x, y)$$

$$\implies L_{OAB}(0, 0) = f_O, \quad L_{OAB}(1, 0) = f_A, \quad L_{OAB}(0, 1) = f_B$$

二変数関数の区分線形補間

点 $O(0, 0)$ 関数値 f_O

点 $A(1, 0)$ 関数値 f_A

点 $B(0, 1)$ 関数値 f_B

一次関数 $\phi_{0,0}(x, y), \phi_{1,0}(x, y), \phi_{0,1}(x, y)$:

$$\begin{aligned}\phi_{0,0}(0, 0) &= 1, & \phi_{0,0}(1, 0) &= 0, & \phi_{0,0}(0, 1) &= 0 \\ &\implies \phi_{0,0}(x, y) &= 1 - x - y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{1,0}(0, 0) &= 0, & \phi_{1,0}(1, 0) &= 1, & \phi_{1,0}(0, 1) &= 0 \\ &\implies \phi_{1,0}(x, y) &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{0,1}(0, 0) &= 0, & \phi_{0,1}(1, 0) &= 0, & \phi_{0,1}(0, 1) &= 1 \\ &\implies \phi_{0,1}(x, y) &= y\end{aligned}$$

領域 $\triangle OAB$ における一次式 $L_{OAB}(x, y)$:

$$L_{OAB}(x, y) = f_O \phi_{0,0}(x, y) + f_A \phi_{1,0}(x, y) + f_B \phi_{0,1}(x, y)$$

$$\implies L_{OAB}(0, 0) = f_O, \quad L_{OAB}(1, 0) = f_A, \quad L_{OAB}(0, 1) = f_B$$

二変数関数の区分線形補間

面積

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}$$

点 $P(x, y)$

$$\Delta OAP = \frac{y}{2}, \quad \Delta OPB = \frac{x}{2}, \quad \Delta PAB = \frac{1-x-y}{2}$$

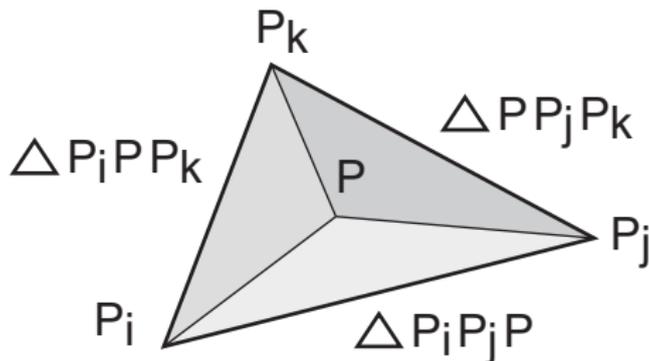
↓

$$\phi_{0,0}(x, y) = \frac{\Delta PAB}{\Delta OAB}, \quad \phi_{1,0}(x, y) = \frac{\Delta OPB}{\Delta OAB}, \quad \phi_{0,1}(x, y) = \frac{\Delta OAP}{\Delta OAB}$$

区分線形補間

$$L_{OAB} = f_O \frac{\Delta PAB}{\Delta OAB} + f_A \frac{\Delta OPB}{\Delta OAB} + f_B \frac{\Delta OAP}{\Delta OAB}$$

二変数関数の区分線形補間



点 $P_i(x_i, y_i)$ 関数値 f_i

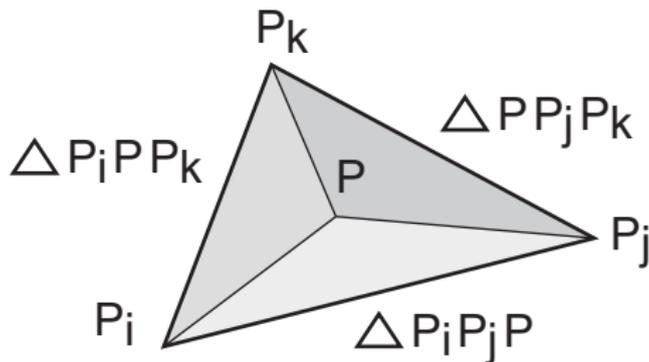
点 $P_j(x_j, y_j)$ 関数値 f_j

点 $P_k(x_k, y_k)$ 関数値 f_k

領域 $\triangle P_i P_j P_k$ における一次式

$$L_{i,j,k}(x, y) = f_i N_{i,j,k}(x, y) + f_j N_{j,k,i}(x, y) + f_k N_{k,i,j}(x, y)$$

二変数関数の区分別形補間



$$N_{i,j,k}(x, y) = \frac{\Delta P P_j P_k}{\Delta P_i P_j P_k} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_i \\ 0 & \text{at } P_j, P_k \end{cases}$$

$$N_{j,k,i}(x, y) = \frac{\Delta P_i P P_k}{\Delta P_i P_j P_k} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_j \\ 0 & \text{at } P_k, P_i \end{cases}$$

$$N_{k,i,j}(x, y) = \frac{\Delta P_i P_j P}{\Delta P_i P_j P_k} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_k \\ 0 & \text{at } P_i, P_j \end{cases}$$

三変数関数の区分別形補間

点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ 関数値 f_i 点 $P_j(x_j, y_j, z_j)$ 関数値 f_j

点 $P_k(x_k, y_k, z_k)$ 関数値 f_k 点 $P_l(x_l, y_l, z_l)$ 関数値 f_l

四面体 $\diamond P_i P_j P_k P_l$ における一次式

$$L_{i,j,k,l} = f_i N_{i,j,k,l} + f_j N_{j,k,l,i} + f_k N_{k,l,i,j} + f_l N_{l,i,j,k}$$

$$N_{i,j,k,l}(x, y, z) = \frac{\diamond P P_j P_k P_l}{\diamond P_i P_j P_k P_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_i \\ 0 & \text{at } P_j, P_k, P_l \end{cases}$$

$$N_{j,k,l,i}(x, y, z) = \frac{\diamond P_i P P_k P_l}{\diamond P_i P_j P_k P_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_j \\ 0 & \text{at } P_k, P_l, P_i \end{cases}$$

$$N_{k,l,i,j}(x, y, z) = \frac{\diamond P_i P_j P P_l}{\diamond P_i P_j P_k P_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_k \\ 0 & \text{at } P_l, P_i, P_j \end{cases}$$

$$N_{l,i,j,k}(x, y, z) = \frac{\diamond P_i P_j P_k P}{\diamond P_i P_j P_k P_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } P_l \\ 0 & \text{at } P_i, P_j, P_k \end{cases}$$

スプライン補間

変数 x の関数 $f(x)$ の値と導関数 $f'(x)$ の値：離散点で与えられる
変数 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \implies$ 関数値 $f = f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$
微係数 $f' = d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$

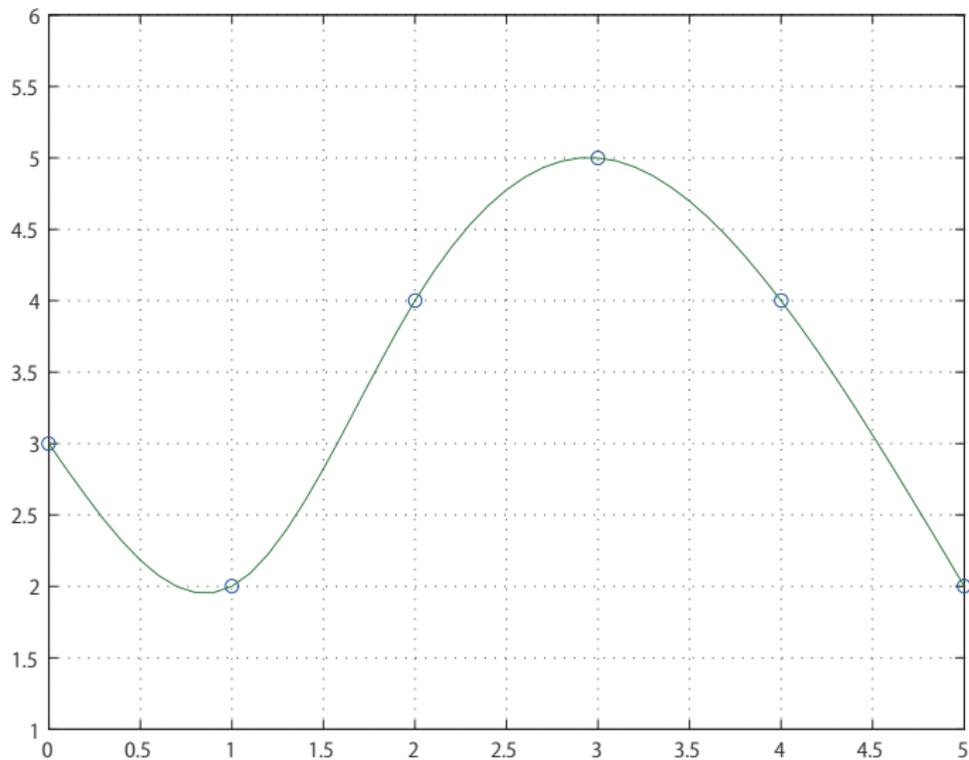
スプライン補間 (spline interpolation)

区間 $[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$: 関数値を三次式で表す

$$f(x) = \begin{cases} Q_0(x) & x \in [0, 1] \\ Q_1(x) & x \in [1, 2] \\ Q_2(x) & x \in [2, 3] \\ Q_3(x) & x \in [3, 4] \\ Q_4(x) & x \in [4, 5] \end{cases}$$

三次式の両端で微係数を指定 $\implies f(x)$ は連続で滑らかな関数

スプライン補間



スプライン補間

三次式 $Q_0(x)$: $Q_0(0) = f_0$, $Q_0(1) = f_1$, $Q_0'(0) = d_0$, $Q_0'(1) = d_1$

$$Q_0(x) = f_0 \times \begin{array}{c} \text{[Graph 1]} \\ \text{[Graph 2]} \end{array} + f_1 \times \begin{array}{c} \text{[Graph 3]} \\ \text{[Graph 4]} \end{array} + d_0 \times \begin{array}{c} \text{[Graph 5]} \\ \text{[Graph 6]} \end{array} + d_1 \times \begin{array}{c} \text{[Graph 7]} \\ \text{[Graph 8]} \end{array}$$

$= f_0 \phi_0(x) + f_1 \phi_1(x)$
 $+ d_0 \psi_0(x) + d_1 \psi_1(x)$

スプライン補間

三次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0, \quad \phi_0'(0) = 0, \quad \phi_0'(1) = 0$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1, \quad \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_1'(1) = 0$$

$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(1) = 0, \quad \psi_0'(0) = 1, \quad \psi_0'(1) = 0$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_1'(1) = 1$$

スプライン補間

三次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\begin{aligned}\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0, \quad \phi_0'(0) = 0, \quad \phi_0'(1) = 0 \\ \implies \phi_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1, \quad \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_1'(1) = 0 \\ \implies \phi_1(x) = -2x^3 + 3x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(1) = 0, \quad \psi_0'(0) = 1, \quad \psi_0'(1) = 0 \\ \implies \psi_0(x) = x(x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_1'(1) = 1 \\ \implies \psi_1(x) = x^2(x-1)\end{aligned}$$

スプライン補間

関数

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 & \phi_1(x) &= -2x^3 + 3x^2 \\ \psi_0(x) &= x(x-1)^2 & \psi_1(x) &= x^2(x-1)\end{aligned}$$

導関数

$$\begin{aligned}\phi'_0(x) &= 6x^2 - 6x & \phi'_1(x) &= -6x^2 + 6x \\ \psi'_0(x) &= (x-1)^2 + 2x(x-1) & \psi'_1(x) &= 2x(x-1) + x^2\end{aligned}$$

二階微分

$$\begin{aligned}\phi''_0(x) &= 12x - 6 & \phi''_1(x) &= -12x + 6 \\ \psi''_0(x) &= 6x - 4 & \psi''_1(x) &= 6x - 2\end{aligned}$$

スプライン補間

スプライン補間

$$Q_0(x) = f_0 \phi_0(x-0) + f_1 \phi_1(x-0) + d_0 \psi_0(x-0) + d_1 \psi_1(x-0)$$

$$Q_1(x) = f_1 \phi_0(x-1) + f_2 \phi_1(x-1) + d_1 \psi_0(x-1) + d_2 \psi_1(x-1)$$

$$Q_2(x) = f_2 \phi_0(x-2) + f_3 \phi_1(x-2) + d_2 \psi_0(x-2) + d_3 \psi_1(x-2)$$

$$Q_3(x) = f_3 \phi_0(x-3) + f_4 \phi_1(x-3) + d_3 \psi_0(x-3) + d_4 \psi_1(x-3)$$

$$Q_4(x) = f_4 \phi_0(x-4) + f_5 \phi_1(x-4) + d_4 \psi_0(x-4) + d_5 \psi_1(x-4)$$

自然スプライン補間

自然スプライン補間 (natural spline interpolation)

離散点における微係数が得られない場合
関数値のみからスプライン関数を決定

条件

- 二階微分が連続
- 両端点で二階微分の値が 0

自然スプライン補間

自然スプライン補間であるための条件

$$\begin{array}{ll} Q_0''(0) = 0 & x = 0 \text{ で二階微分の値が } 0 \\ Q_1''(1) = Q_0''(1) & x = 1 \text{ で二階微分が連続} \\ Q_2''(2) = Q_1''(2) & x = 2 \text{ で二階微分が連続} \\ Q_3''(3) = Q_2''(3) & x = 3 \text{ で二階微分が連続} \\ Q_4''(4) = Q_3''(4) & x = 4 \text{ で二階微分が連続} \\ 0 = Q_4''(5) & x = 5 \text{ で二階微分の値が } 0 \end{array}$$

⇓

$$\begin{array}{rcl} -6f_0 + 6f_1 - 4d_0 - 2d_1 & = & 0 \\ -6f_1 + 6f_2 - 4d_1 - 2d_2 & = & 6f_0 - 6f_1 + 2d_0 + 4d_1 \\ -6f_2 + 6f_3 - 4d_2 - 2d_3 & = & 6f_1 - 6f_2 + 2d_1 + 4d_2 \\ -6f_3 + 6f_4 - 4d_3 - 2d_4 & = & 6f_2 - 6f_3 + 2d_2 + 4d_3 \\ -6f_4 + 6f_5 - 4d_4 - 2d_5 & = & 6f_3 - 6f_4 + 2d_3 + 4d_4 \\ 0 & = & 6f_4 - 6f_5 + 2d_4 + 4d_5 \end{array}$$

自然スプライン補間

未知の微係数 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ を求める方程式

$$\begin{aligned} 2d_0 + d_1 &= 3(f_1 - f_0) \\ d_0 + 4d_1 + d_2 &= 3(f_2 - f_0) \\ d_1 + 4d_2 + d_3 &= 3(f_3 - f_1) \\ d_2 + 4d_3 + d_4 &= 3(f_4 - f_2) \\ d_3 + 4d_4 + d_5 &= 3(f_5 - f_3) \\ d_4 + 2d_5 &= 3(f_5 - f_4) \end{aligned}$$

行列形式

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(f_1 - f_0) \\ 3(f_2 - f_0) \\ 3(f_3 - f_1) \\ 3(f_4 - f_2) \\ 3(f_5 - f_3) \\ 3(f_5 - f_4) \end{bmatrix}$$

自然スプライン補間

行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

は正定対称 \implies 正則 \implies

未知の微係数 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ を必ず求めることができる

自然スプライン補間

正定性

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} + \dots \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

MATLAB

ファイル natural_spline.m

```
n = 6;
f = [ 3; 2; 4; 5; 4; 2 ];

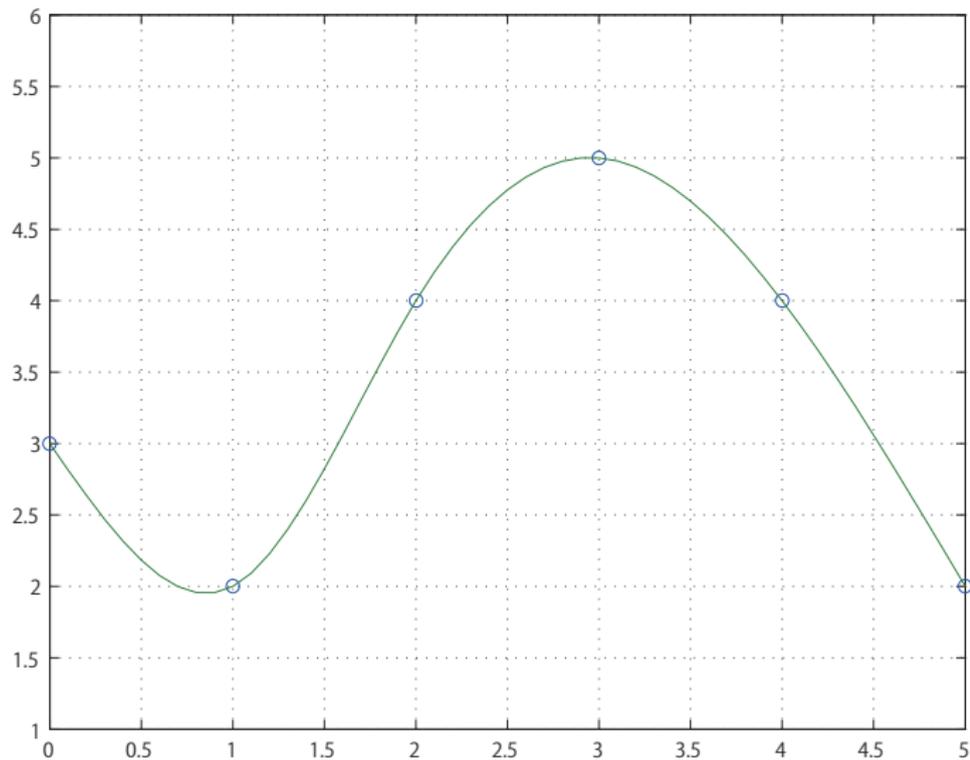
e1 = ones(n,1);
e0 = 4*ones(n,1);
e0(1) = 2;
e0(n) = 2;
A = spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n, n); % 三重対角行列
[U] = chol(A);
```

MATLAB

ファイル natural_spline.m

```
b = zeros(n,1);  
b(1) = f(2)-f(1);  
b(n) = f(n)-f(n-1);  
b(2:n-1)=f(3:n)-f(1:n-2);  
b = 3*b;  
  
% Ad = b --> transpose(U) U d = b  
y = transpose(U)\b;  
d = U\y;
```

MATLAB



MATLAB

```
>> natural_spline
```

```
>> d
```

```
d =
```

```
-1.8421
```

```
0.6842
```

```
2.1053
```

```
-0.1053
```

```
-1.6842
```

```
-2.1579
```

MATLAB

```
>> A*d - b
```

```
ans =
```

```
1.0e-15 *
```

```
0.8882
```

```
0.4441
```

```
0
```

```
-0.2220
```

```
0
```

```
0
```

MATLAB

```
>> full(A)
```

```
ans =
```

```
    2    1    0    0    0    0
    1    4    1    0    0    0
    0    1    4    1    0    0
    0    0    1    4    1    0
    0    0    0    1    4    1
    0    0    0    0    1    2
```

MATLAB

```
>> full(U)
```

```
ans =
```

```
1.4142  0.7071  0  0  0  0
0  1.8708  0.5345  0  0  0
0  0  1.9272  0.5189  0  0
0  0  0  1.9315  0.5177  0
0  0  0  0  1.9318  0.5176
0  0  0  0  0  1.3161
```

MATLAB

```
>> full(transpose(U)*U)
```

```
ans =
```

```
2.0000    1.0000         0         0         0         0
1.0000    4.0000    1.0000         0         0         0
         0    1.0000    4.0000    1.0000         0         0
         0         0    1.0000    4.0000    1.0000         0
         0         0         0    1.0000    4.0000    1.0000
         0         0         0         0    1.0000    2.0000
```

まとめ

区分線形補間

- 離散点における関数値
- 各区間を一次式で補間
- 離散点で連続だが滑らかではない

スプライン補間

- 離散点における関数値と微係数
- 各区間を三次式で補間
- 離散点で連続で滑らか

自然スプライン補間

- 離散点における関数値
- 微係数を求める連立一次方程式

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「補間」

締切：2024年6月24日（月曜）00:10 AM

付録：スプライン補間

$\phi'_0(x)$ は 2 次式で $x = 0, 1$ を零点に持つ

$$\phi'_0(x) = ax(x - 1) = a(x^2 - x)$$

積分

$$\phi_0(x) = a \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) + b$$

$$\phi_0(0) = b = 1,$$

$$\phi_0(1) = a \left(-\frac{1}{6} \right) + b = 0$$

$$a = 6, \quad b = 1$$

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) + 1 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

付録：スプライン補間

同様に

$$\phi_1(x) = a \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) + b$$

$$\phi_1(0) = b = 0,$$

$$\phi_1(1) = a \left(-\frac{1}{6} \right) + b = 1$$

$$a = -6, \quad b = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= -6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \\ &= -2x^3 + 3x^2 \end{aligned}$$

付録：スプライン補間

$\psi_0(x)$ は 3 次式で $x = 0, 1$ を零点に持つ

$$\psi_0(x) = ax(x-1)(x-b)$$

微分

$$\psi'_0(x) = a \{(x-1)(x-b) + x(x-b) + x(x-1)\}$$

$$\psi'_0(0) = ab = 1,$$

$$\psi'_0(1) = a(1-b) = 0$$

$$a = 1, \quad b = 1$$

$$\psi_0(x) = x(x-1)(x-1) = x(x-1)^2$$

付録：スプライン補間

同様に

$$\psi_1'(x) = a \{(x-1)(x-b) + x(x-b) + x(x-1)\}$$

$$\psi_1'(0) = ab = 0,$$

$$\psi_1'(1) = a(1-b) = 1$$

$$a = 1, \quad b = 0$$

$$\psi_1(x) = x(x-1)(x-0) = x^2(x-1)$$