数値計算：補間

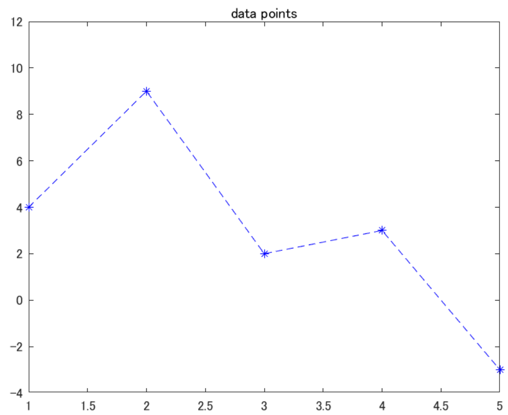
平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

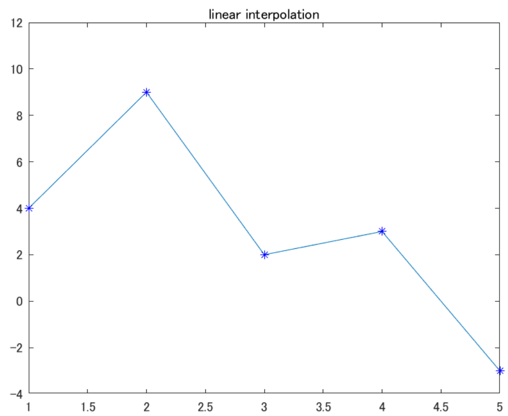
講義の流れ

1. 区分線形補間
2. スプライン補間
3. まとめ

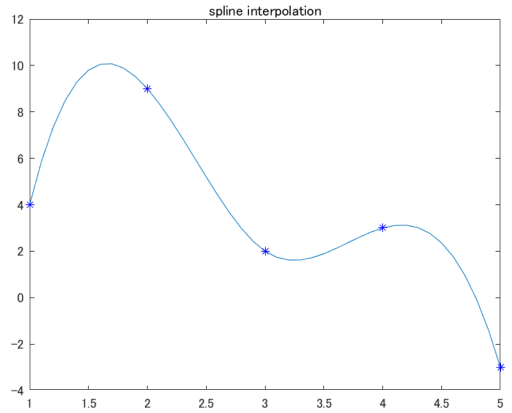
MATLAB



MATLAB



MATLAB



MATLAB

プログラム interp.m

```
x = 1:5';
y = [4; 9; 2; 3; -3];

xq = 1:0.1:5';

% 区分線形補間
yq = interp1(x, y, xq);
plot(xq, yq, x, y, 'b*');

% スプライン補間
yq = interp1(x, y, xq, 'spline');
plot(xq, yq, x, y, 'b*');
```


区分線形補間

変数 x の関数 $f(x)$ の値：離散点で与えられる

変数 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad \Longrightarrow \quad$ 関数値 $f = f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5$

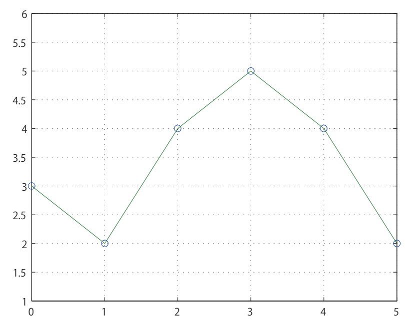
区分線形補間 (piecewise linear interpolation)

区間 $[0, 1],\ [1, 2],\ [2, 3],\ [3, 4],\ [4, 5]$：関数値を一次式で表す

$$f(x) = \begin{cases} L_0(x) & x \in [0, 1] \\ L_1(x) & x \in [1, 2] \\ L_2(x) & x \in [2, 3] \\ L_3(x) & x \in [3, 4] \\ L_4(x) & x \in [4, 5] \end{cases}$$

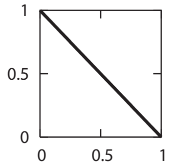
$L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_4(x)$：一次式

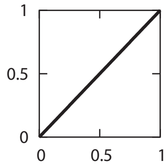
区分線形補間



区分線形補間

一次関数 $L_0(x)$： $L_0(0) = f_0,\ L_0(1) = f_1$

$L_0(x) = f_0 \times$ 

$+\ f_1 \times$ 

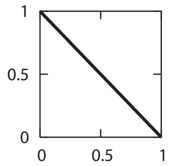
$$= f_0\,\phi_0(x) + f_1\,\phi_1(x)$$

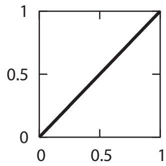
一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0$$
$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1$$

区分線形補間

一次関数 $L_0(x)$： $L_0(0) = f_0,\ L_0(1) = f_1$

$L_0(x) = f_0 \times$ 

$+\ f_1 \times$ 

$$= f_0\,\phi_0(x) + f_1\,\phi_1(x)$$

一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \phi_0(x) = 1 - x$$
$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \phi_1(x) = x$$

区分線形補間

一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ を 1 平行移動

$$\phi_0(x-1) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (x=1) \\ 0 & (x=2) \end{array} \right., \quad \phi_1(x-1) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x=1) \\ 1 & (x=2) \end{array} \right.$$

$L_1(1) = f_1,\ L_1(2) = f_2 \quad \Longrightarrow$

$$L_1(x) = f_1\,\phi_0(x-1) + f_2\,\phi_1(x-1)$$

一次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x)$ を 2 平行移動

$$\phi_0(x-2) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (x=2) \\ 0 & (x=3) \end{array} \right., \quad \phi_1(x-2) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x=2) \\ 1 & (x=3) \end{array} \right.$$

$L_2(2) = f_2,\ L_2(3) = f_3 \quad \Longrightarrow$

$$L_2(x) = f_2\,\phi_0(x-2) + f_3\,\phi_1(x-2)$$

区分線形補間

区分線形補間

$$L_0(x) = f_0\,\phi_0(x-0) + f_1\,\phi_1(x-0)$$
$$L_1(x) = f_1\,\phi_0(x-1) + f_2\,\phi_1(x-1)$$
$$L_2(x) = f_2\,\phi_0(x-2) + f_3\,\phi_1(x-2)$$
$$L_3(x) = f_3\,\phi_0(x-3) + f_4\,\phi_1(x-3)$$
$$L_4(x) = f_4\,\phi_0(x-4) + f_5\,\phi_1(x-4)$$

二変数関数の区分線形補間

点 $\mathrm{O}(0,0)$ 関数値 f_{O}
点 $\mathrm{A}(1,0)$ 関数値 f_{A}
点 $\mathrm{B}(0,1)$ 関数値 f_{B}

一次関数 $\phi_{0,0}(x,y), \phi_{1,0}(x,y), \phi_{0,1}(x,y)$：

$$\phi_{0,0}(0,0) = 1, \quad \phi_{0,0}(1,0) = 0, \quad \phi_{0,0}(0,1) = 0$$
$$\phi_{1,0}(0,0) = 0, \quad \phi_{1,0}(1,0) = 1, \quad \phi_{1,0}(0,1) = 0$$
$$\phi_{0,1}(0,0) = 0, \quad \phi_{0,1}(1,0) = 0, \quad \phi_{0,1}(0,1) = 1$$

領域 $\triangle\mathrm{OAB}$ における一次式 $L_{\mathrm{OAB}}(x,y)$：

$$L_{\mathrm{OAB}}(x,y) = f_{\mathrm{O}}\,\phi_{0,0}(x,y) + f_{\mathrm{A}}\,\phi_{1,0}(x,y) + f_{\mathrm{B}}\,\phi_{0,1}(x,y)$$
$$\Longrightarrow \quad L_{\mathrm{OAB}}(0,0) = f_{\mathrm{O}},\ L_{\mathrm{OAB}}(1,0) = f_{\mathrm{A}},\ L_{\mathrm{OAB}}(0,1) = f_{\mathrm{B}}$$

二変数関数の区分線形補間

点 $\mathrm{O}(0,0)$ 関数値 f_{O}
点 $\mathrm{A}(1,0)$ 関数値 f_{A}
点 $\mathrm{B}(0,1)$ 関数値 f_{B}

一次関数 $\phi_{0,0}(x,y), \phi_{1,0}(x,y), \phi_{0,1}(x,y)$：

$$\phi_{0,0}(0,0) = 1, \quad \phi_{0,0}(1,0) = 0, \quad \phi_{0,0}(0,1) = 0$$
$$\Longrightarrow \phi_{0,0}(x,y) = 1 - x - y$$
$$\phi_{1,0}(0,0) = 0, \quad \phi_{1,0}(1,0) = 1, \quad \phi_{1,0}(0,1) = 0$$
$$\Longrightarrow \phi_{1,0}(x,y) = x$$
$$\phi_{0,1}(0,0) = 0, \quad \phi_{0,1}(1,0) = 0, \quad \phi_{0,1}(0,1) = 1$$
$$\Longrightarrow \phi_{0,1}(x,y) = y$$

領域 $\triangle\mathrm{OAB}$ における一次式 $L_{\mathrm{OAB}}(x,y)$：

$$L_{\mathrm{OAB}}(x,y) = f_{\mathrm{O}}\,\phi_{0,0}(x,y) + f_{\mathrm{A}}\,\phi_{1,0}(x,y) + f_{\mathrm{B}}\,\phi_{0,1}(x,y)$$
$$\Longrightarrow \quad L_{\mathrm{OAB}}(0,0) = f_{\mathrm{O}},\ L_{\mathrm{OAB}}(1,0) = f_{\mathrm{A}},\ L_{\mathrm{OAB}}(0,1) = f_{\mathrm{B}}$$

二変数関数の区分線形補間

面積

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}$$

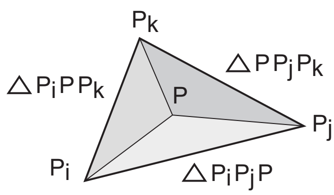
点 $\mathrm{P}(x,y)$

$$\triangle\mathrm{OAP} = \frac{y}{2}, \quad \triangle\mathrm{OPB} = \frac{x}{2}, \quad \triangle\mathrm{PAB} = \frac{1-x-y}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\phi_{0,0}(x,y) = \frac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{OAB}}, \quad \phi_{1,0}(x,y) = \frac{\triangle\mathrm{OPB}}{\triangle\mathrm{OAB}}, \quad \phi_{0,1}(x,y) = \frac{\triangle\mathrm{OAP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$$

区分線形補間

$$L_{\mathrm{OAB}} = f_{\mathrm{O}}\,\frac{\triangle\mathrm{PAB}}{\triangle\mathrm{OAB}} + f_{\mathrm{A}}\,\frac{\triangle\mathrm{OPB}}{\triangle\mathrm{OAB}} + f_{\mathrm{B}}\,\frac{\triangle\mathrm{OAP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$$

二変数関数の区分線形補間

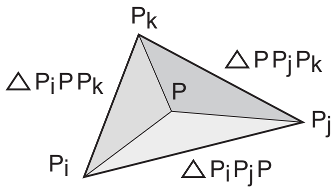


点 $\mathrm{P}_i(x_i, y_i)$ 関数値 f_i
点 $\mathrm{P}_j(x_j, y_j)$ 関数値 f_j
点 $\mathrm{P}_k(x_k, y_k)$ 関数値 f_k

領域 $\triangle\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k$ における一次式

$$L_{i,j,k}(x,y) = f_i\,N_{i,j,k}(x,y) + f_j\,N_{j,k,i}(x,y) + f_k\,N_{k,i,j}(x,y)$$

二変数関数の区分線形補間



$$N_{i,j,k}(x,y) = \frac{\triangle \mathrm{PP}_j\mathrm{P}_k}{\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_i \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k \end{cases}$$

$$N_{j,k,i}(x,y) = \frac{\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{PP}_k}{\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_j \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_i \end{cases}$$

$$N_{k,i,j}(x,y) = \frac{\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}}{\triangle \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_k \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j \end{cases}$$

三変数関数の区分線形補間

点 $\mathrm{P}_i(x_i, y_i, z_i)$ 関数値 f_i 点 $\mathrm{P}_j(x_j, y_j, z_j)$ 関数値 f_j
点 $\mathrm{P}_k(x_k, y_k, z_k)$ 関数値 f_k 点 $\mathrm{P}_l(x_l, y_l, z_l)$ 関数値 f_l

四面体 $\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l$ における一次式

$$L_{i,j,k,l} = f_i\, N_{i,j,k,l} + f_j\, N_{j,k,l,i} + f_k\, N_{k,l,i,j} + f_l\, N_{l,i,j,k}$$

$$N_{i,j,k,l}(x,y,z) = \frac{\Diamond \mathrm{PP}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l}{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_i \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_l \end{cases}$$

$$N_{j,k,l,i}(x,y,z) = \frac{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{PP}_k\mathrm{P}_l}{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_j \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_k, \mathrm{P}_l, \mathrm{P}_i \end{cases}$$

$$N_{k,l,i,j}(x,y,z) = \frac{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{PP}_l}{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_k \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_l, \mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j \end{cases}$$

$$N_{l,i,j,k}(x,y,z) = \frac{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}}{\Diamond \mathrm{P}_i\mathrm{P}_j\mathrm{P}_k\mathrm{P}_l} = \begin{cases} 1 & \text{at } \mathrm{P}_l \\ 0 & \text{at } \mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k \end{cases}$$

スプライン補間

変数 x の関数 $f(x)$ の値と導関数 $f'(x)$ の値：離散点で与えられる
変数 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad \Longrightarrow \quad$ 関数値 $f = f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4,\ f_5$
微係数 $f' = d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$

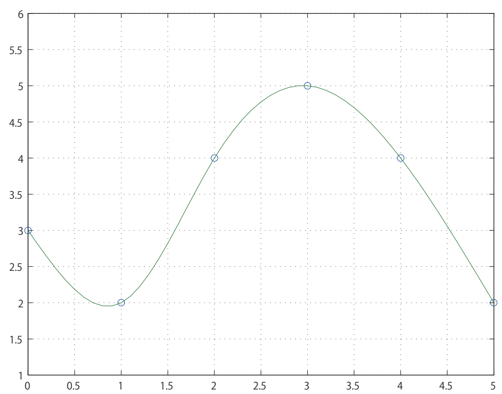
スプライン補間 (spline interpolation)

区間 $[0,\ 1],\ [1,\ 2],\ [2,\ 3],\ [3,\ 4],\ [4,\ 5]$：関数値を三次式で表す

$$f(x) = \begin{cases} Q_0(x) & x \in [0,\ 1] \\ Q_1(x) & x \in [1,\ 2] \\ Q_2(x) & x \in [2,\ 3] \\ Q_3(x) & x \in [3,\ 4] \\ Q_4(x) & x \in [4,\ 5] \end{cases}$$

三次式の両端で微係数を指定 $\Longrightarrow f(x)$ は連続で滑らかな関数

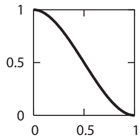
スプライン補間



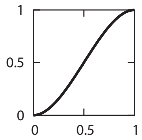
スプライン補間

三次式 $Q_0(x)$： $\quad Q_0(0) = f_0,\ Q_0(1) = f_1,\ Q_0'(0) = d_0,\ Q_0'(1) = d_1$

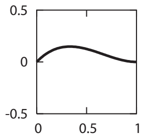
$Q_0(x) = f_0 \times$



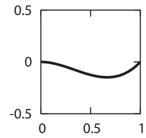
$+ \ f_1 \times$



$+ \ d_0 \times$



$+ \ d_1 \times$



$$= f_0\, \phi_0(x) + f_1\, \phi_1(x) + d_0\, \psi_0(x) + d_1\, \psi_1(x)$$

スプライン補間

三次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0, \quad \phi_0'(0) = 0, \quad \phi_0'(1) = 0$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1, \quad \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_1'(1) = 0$$

$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(1) = 0, \quad \psi_0'(0) = 1, \quad \psi_0'(1) = 0$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_1'(1) = 1$$

スプライン補間

三次関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ が満たすべき条件

$$\phi_0(0) = 1, \quad \phi_0(1) = 0, \quad \phi_0'(0) = 0, \quad \phi_0'(1) = 0$$
$$\Longrightarrow \phi_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

$$\phi_1(0) = 0, \quad \phi_1(1) = 1, \quad \phi_1'(0) = 0, \quad \phi_1'(1) = 0$$
$$\Longrightarrow \phi_1(x) = -2x^3 + 3x^2$$

$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(1) = 0, \quad \psi_0'(0) = 1, \quad \psi_0'(1) = 0$$
$$\Longrightarrow \psi_0(x) = x(x-1)^2$$

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_1(1) = 0, \quad \psi_1'(0) = 0, \quad \psi_1'(1) = 1$$
$$\Longrightarrow \psi_1(x) = x^2(x-1)$$

スプライン補間

関数

$$\phi_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \qquad \phi_1(x) = -2x^3 + 3x^2$$
$$\psi_0(x) = x(x-1)^2 \qquad \psi_1(x) = x^2(x-1)$$

導関数

$$\phi_0'(x) = 6x^2 - 6x \qquad \phi_1'(x) = -6x^2 + 6x$$
$$\psi_0'(x) = (x-1)^2 + 2x(x-1) \qquad \psi_1'(x) = 2x(x-1) + x^2$$

二階微分

$$\phi_0''(x) = 12x - 6 \qquad \phi_1''(x) = -12x + 6$$
$$\psi_0''(x) = 6x - 4 \qquad \psi_1''(x) = 6x - 2$$

スプライン補間

スプライン補間

$$
\begin{aligned}
Q_0(x) &= f_0\,\phi_0(x-0) + f_1\,\phi_1(x-0) + d_0\,\psi_0(x-0) + d_1\,\psi_1(x-0)\\
Q_1(x) &= f_1\,\phi_0(x-1) + f_2\,\phi_1(x-1) + d_1\,\psi_0(x-1) + d_2\,\psi_1(x-1)\\
Q_2(x) &= f_2\,\phi_0(x-2) + f_3\,\phi_1(x-2) + d_2\,\psi_0(x-2) + d_3\,\psi_1(x-2)\\
Q_3(x) &= f_3\,\phi_0(x-3) + f_4\,\phi_1(x-3) + d_3\,\psi_0(x-3) + d_4\,\psi_1(x-3)\\
Q_4(x) &= f_4\,\phi_0(x-4) + f_5\,\phi_1(x-4) + d_4\,\psi_0(x-4) + d_5\,\psi_1(x-4)
\end{aligned}
$$

自然スプライン補間

自然スプライン補間 (natural spline interpolation)

離散点における微係数が得られない場合
関数値のみからスプライン関数を決定

条件

- 二階微分が連続
- 両端点で二階微分の値が 0

自然スプライン補間

自然スプライン補間であるための条件

$$
\begin{array}{rcll}
Q_0''(0) &=& 0 & x=0\text{ で二階微分の値が }0\\
Q_1''(1) &=& Q_0''(1) & x=1\text{ で二階微分が連続}\\
Q_2''(2) &=& Q_1''(2) & x=2\text{ で二階微分が連続}\\
Q_3''(3) &=& Q_2''(3) & x=3\text{ で二階微分が連続}\\
Q_4''(4) &=& Q_3''(4) & x=4\text{ で二階微分が連続}\\
0 &=& Q_4''(5) & x=5\text{ で二階微分の値が }0
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{rcl}
-6f_0+6f_1-4d_0-2d_1 &=& 0\\
-6f_1+6f_2-4d_1-2d_2 &=& 6f_0-6f_1+2d_0+4d_1\\
-6f_2+6f_3-4d_2-2d_3 &=& 6f_1-6f_2+2d_1+4d_2\\
-6f_3+6f_4-4d_3-2d_4 &=& 6f_2-6f_3+2d_2+4d_3\\
-6f_4+6f_5-4d_4-2d_5 &=& 6f_3-6f_4+2d_3+4d_4\\
0 &=& 6f_4-6f_5+2d_4+4d_5
\end{array}
$$

自然スプライン補間

未知の微係数 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ を求める方程式

$$
\begin{array}{cccccccl}
2d_0 & +d_1 & & & & & = & 3(f_1-f_0)\\
d_0 & +4d_1 & +d_2 & & & & = & 3(f_2-f_0)\\
 & d_1 & +4d_2 & +d_3 & & & = & 3(f_3-f_1)\\
 & & d_2 & +4d_3 & +d_4 & & = & 3(f_4-f_2)\\
 & & & d_3 & +4d_4 & +d_5 & = & 3(f_5-f_3)\\
 & & & & d_4 & +2d_5 & = & 3(f_5-f_4)
\end{array}
$$

行列形式

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & \\
 & & & 1 & 4 & 1\\
 & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} d_0\\ d_1\\ d_2\\ d_3\\ d_4\\ d_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 3(f_1-f_0)\\ 3(f_2-f_0)\\ 3(f_3-f_1)\\ 3(f_4-f_2)\\ 3(f_5-f_3)\\ 3(f_5-f_4) \end{bmatrix}
$$

自然スプライン補間

行列

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & \\
 & & & 1 & 4 & 1\\
 & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

は正定対称 $\Longrightarrow$ 正則 $\Longrightarrow$
未知の微係数 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ を必ず求めることができる

自然スプライン補間

正定性

$$
\begin{bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 1 & & & \\
 & 1 & 4 & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & 1 & \\
 & & & 1 & 4 & 1\\
 & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} d_0\\ d_1\\ d_2\\ d_3\\ d_4\\ d_5 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} d_0 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_0\\ d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1\\ d_2 \end{bmatrix} + \cdots
$$

$$\geq 0$$

MATLAB

ファイル natural_spline.m

```
n = 6;
f = [ 3; 2; 4; 5; 4; 2 ];

e1 = ones(n,1);
e0 = 4*ones(n,1);
e0(1) = 2;
e0(n) = 2;
A =  spdiags([e1 e0 e1], -1:1, n, n); % 三重対角行列
[U] = chol(A);
```

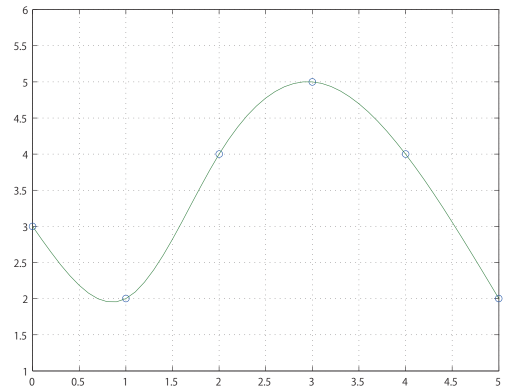

MATLAB

ファイル natural_spline.m

```
b = zeros(n,1);
b(1) = f(2)-f(1);
b(n) = f(n)-f(n-1);
b(2:n-1)=f(3:n)-f(1:n-2);
b = 3*b;

% Ad = b --> transose(U) U d = b
y = transpose(U)\b;
d = U\y;
```

MATLAB



MATLAB

```
>> natural_spline
>> d

d =
   -1.8421
    0.6842
    2.1053
   -0.1053
   -1.6842
   -2.1579
```


MATLAB

```
>> A*d - b

ans =

   1.0e-15 *

    0.8882
    0.4441
         0
   -0.2220
         0
         0
```


MATLAB

```
>> full(A)

ans =

     2     1     0     0     0     0
     1     4     1     0     0     0
     0     1     4     1     0     0
     0     0     1     4     1     0
     0     0     0     1     4     1
     0     0     0     0     1     2
```


MATLAB

```
>> full(U)

ans =

    1.4142    0.7071         0         0         0         0
         0    1.8708    0.5345         0         0         0
         0         0    1.9272    0.5189         0         0
         0         0         0    1.9315    0.5177         0
         0         0         0         0    1.9318    0.5176
         0         0         0         0         0    1.3161
```


MATLAB

```
>> full(transpose(U)*U)

ans =

    2.0000    1.0000         0         0         0         0
    1.0000    4.0000    1.0000         0         0         0
         0    1.0000    4.0000    1.0000         0         0
         0         0    1.0000    4.0000    1.0000         0
         0         0         0    1.0000    4.0000    1.0000
         0         0         0         0    1.0000    2.0000
```


まとめ

区分線形補間

- 離散点における関数値
- 各区間を一次式で補間
- 離散点で連続だが滑らかではない

スプライン補間

- 離散点における関数値と微係数
- 各区間を三次式で補間
- 離散点で連続で滑らか

自然スプライン補間

- 離散点における関数値
- 微係数を求める連立一次方程式

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「補間」
締切：2024 年 6 月 24 日（月曜）00:10 AM

付録：スプライン補間

$\phi_0'(x)$ は 2 次式で $x = 0, 1$ を零点に持つ

$$\phi_0'(x) = ax(x-1) = a(x^2 - x)$$

積分

$$\phi_0(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + b$$

$$\begin{aligned}\phi_0(0) &= b = 1,\\ \phi_0(1) &= a\left(-\frac{1}{6}\right) + b = 0\end{aligned}$$

$a = 6$，$b = 1$

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + 1\\ &= 2x^3 - 3x^2 + 1\end{aligned}$$

付録：スプライン補間

同様に

$$\phi_1(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + b$$

$$\begin{aligned}\phi_1(0) &= b = 0,\\ \phi_1(1) &= a\left(-\frac{1}{6}\right) + b = 1\end{aligned}$$

$a = -6$，$b = 0$

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= -6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\\ &= -2x^3 + 3x^2\end{aligned}$$

付録：スプライン補間

$\psi_0(x)$ は 3 次式で $x = 0, 1$ を零点に持つ

$$\psi_0(x) = ax(x-1)(x-b)$$

微分

$$\psi_0'(x) = a\{(x-1)(x-b) + x(x-b) + x(x-1)\}$$

$$\begin{aligned}\psi_0'(0) &= ab = 1,\\ \psi_0'(1) &= a(1-b) = 0\end{aligned}$$

$a = 1$，$b = 1$

$$\psi_0(x) = x(x-1)(x-1) = x(x-1)^2$$

付録：スプライン補間

同様に

$$\psi_1'(x) = a\{(x-1)(x-b) + x(x-b) + x(x-1)\}$$

$$\begin{aligned}\psi_1'(0) &= ab = 0,\\ \psi_1'(1) &= a(1-b) = 1\end{aligned}$$

$a = 1$，$b = 0$

$$\psi_1(x) = x(x-1)(x-0) = x^2(x-1)$$