数値計算

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

数学とは

- 工学・技術・科学の言語である.
- 工学・技術・科学の道具である.

工学・技術・科学の言語である

We call the matrix C the *Coriolis matrix* for the manipulator; the vector $C(\theta,\dot\theta)\dot\theta$ gives the Coriolis and centrifugal force terms in the equations of motion. Note that there are other ways to define the matrix $C(\theta,\dot\theta)$ such that $C_{ij}(\theta,\dot\theta)\dot\theta_j = \Gamma_{ijk}\dot\theta_j\dot\theta_k$. However, this particular choice has important properties which we shall later exploit.

Equation (4.21) can now be rewritten as

$$\boxed{M(\theta)\ddot\theta + C(\theta,\dot\theta)\dot\theta + N(\theta,\dot\theta) = \tau} \tag{4.24}$$

where τ is the vector of actuator torques and $N(\theta,\dot\theta)$ includes gravity terms and other forces which act at the joints. This is a second-order vector differential equation for the motion of the manipulator as a function of the applied joint torques. The matrices M and C, which summarize the inertial properties of the manipulator, have some important properties which we shall use in the sequel:

工学・技術・科学の言語である

Trong trường hợp lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế thì $Q_I^* = 0$. Khi đó phương trình Lagrange loại hai có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, f) \qquad (5.15)$$

Nếu ta đưa vào hệ thức

$$L = T(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) - \Pi(q_1, \ldots, q_f)$$

thì phương trình (5.15) có dạng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, f) \qquad (5.16)$$

Chú ý. Trong trường hợp hệ các vật rắn chịu các liên kết hôlônôm, phương trình Lagrange loại hai vẫn có dạng như (5.15). Ta công nhận không chứng minh.

工学・技術・科学の言語である

则式(e)可改写为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y \\
\sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z \\
\tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz} \\
\tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz} \\
\tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}
\end{aligned}\right\} \qquad (4-12)
$$

或

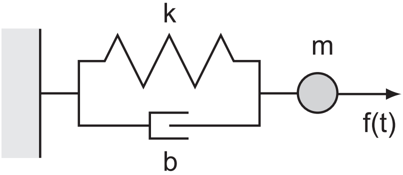
$$
\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (4-12)'
$$

式(4－12)即各向同性弹性体的广义胡克定律，λ，μ 称为**拉梅**(Lamé，G.)**常数**。

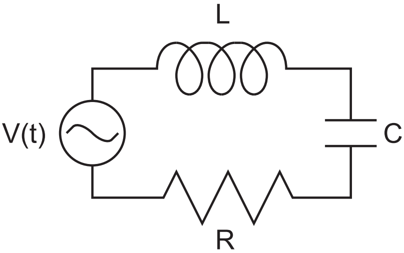
从式(4－12)容易看出，在各向同性体内的各点，应力主方向和应变主方向是一致的。事实上，如果将坐标轴取得与物体内某点的应变主方向重合，此时，所有的切应变分量为零。但由式(4－12)的后三式可知，此时切应力分量也必须为零，因此，这 3 个坐标轴的方向又是应力主方向，也即两者是一致的。

工学・技術・科学の道具である

質点・バネ・ダンパー系



LCR 回路



工学・技術・科学の道具である

質点・バネ・ダンパー系の運動方程式

$$m\ddot{x} = f(t) - b\dot{x} - kx$$

LCR 系の回路方程式

$$V(t) - L\dot{i} - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau - Ri = 0$$

微分方程式という道具でモデリングできる

工学・技術・科学の道具である

質点・バネ・ダンパー系の運動方程式

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= v \\
m\dot{v} &= -bv - kx + f(t)
\end{aligned}
$$

LCR 系の回路方程式

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= i \\
L\dot{i} &= -Ri - \frac{1}{C}q + V(t)
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

数学的に同じ構造であることがわかる

工学・技術・科学の道具である

微分と積分（特に微分）
線形代数（行列とベクトル）

応用数学 I	微分方程式
応用数学 II	複素数と複素関数
数値計算	数値的に数学の問題を解く方法

工学・技術・科学の道具である

一般論は不要（後からで OK）
説明が必要．証明は不要

力学，電子回路，制御工学等とのつながりを意識する

いろいろな道具を試してみる

解析解と数値解

微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2x$$

解析的に解く：式の変形を通して解を求める．

解析解：

$$x(t) = x(0)e^{-2t}$$

任意の初期値に対して成り立つ．

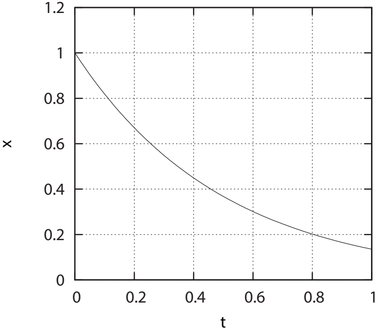
解析解と数値解

数値的に解く：数値の列で解を表す

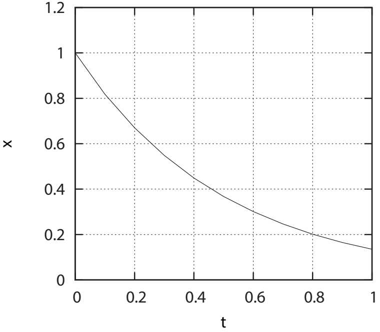
数値解の例：オイラー法，微分方程式の初期値 $x(0) = 1.00$

t	x
0.000000	1.000000
0.100000	0.818567
0.200000	0.670052
0.300000	0.548482
0.400000	0.448969
0.500000	0.367511
0.600000	0.300833
0.700000	0.246252
0.800000	0.201573
0.900000	0.165001
1.000000	0.135065

解析解と数値解



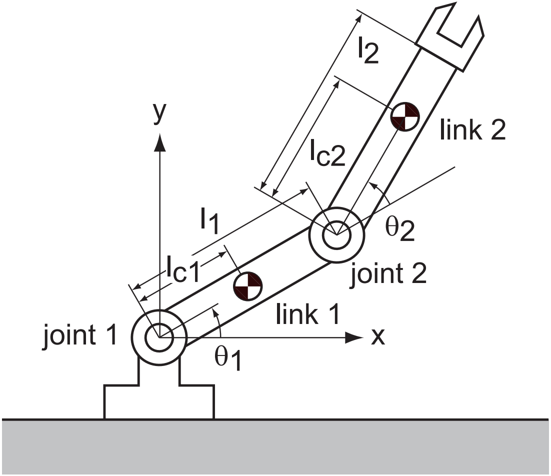
解析解



数値解

なぜ数値計算

二自由度リンク機構



なぜ数値計算

二自由度リンク機構の運動方程式

$$H_{11}\ddot{\theta}_1 + H_{12}\ddot{\theta}_2 = h_{12}\dot{\theta}_2^2 + 2h_{12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1,$$
$$H_{22}\ddot{\theta}_2 + H_{12}\ddot{\theta}_1 = -h_{12}\dot{\theta}_1^2 - G_{12} + \tau_2$$

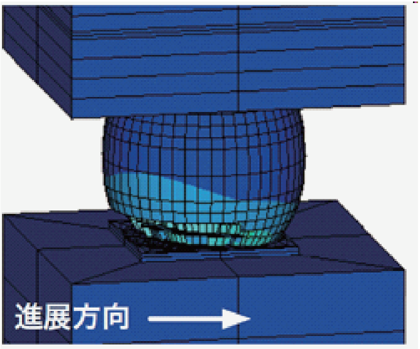
ただし

$$H_{11} = J_1 + m_1 l_{c1}^2 + J_2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2}\cos\theta_2)$$
$$H_{12} = J_2 + m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2}\cos\theta_2)$$
$$H_{22} = J_2 + m_2 l_{c2}^2$$
$$h_{12} = m_2 l_1 l_{c2}\sin\theta_2$$
$$G_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)\, g\cos\theta_1$$
$$G_{12} = m_2 l_{c2}\, g\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

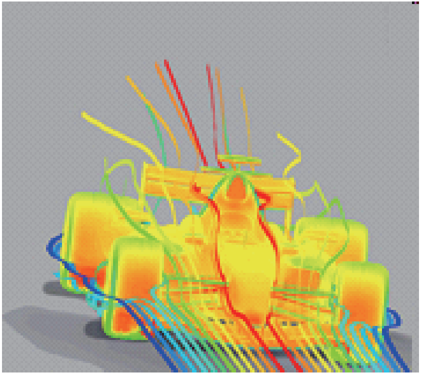
解析的に解くことができない

数値的に解く (シミュレーション)

なぜ数値計算

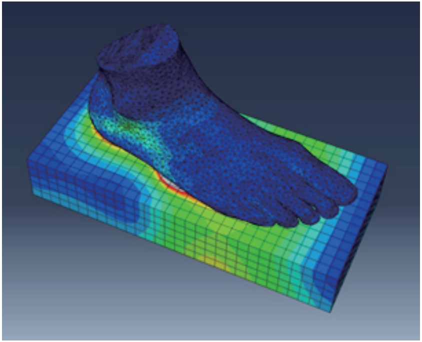


構造解析

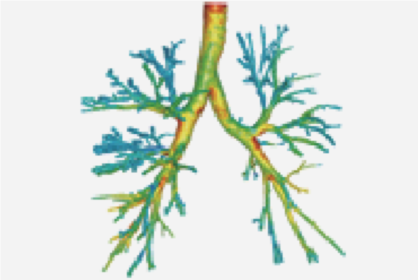


流体力学

なぜ数値計算



歩行の解析



循環機能の解析

講義内容

MATLAB	行列とベクトル，常微分方程式
	最適化，パラメータの受け渡し，乱数
常微分方程式	標準形，状態変数，ルンゲ・クッタ法
	ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法
	制約，制約安定化法 (CSM)
連立一次方程式	LU 分解，ピボット型 LU 分解
	ピボット選択型 LU 分解，コレスキー分解
射影	射影行列，グラム・シュミットの直交化
補間	区分線形補間，スプライン補間
確率的アルゴリズム	乱数，一様乱数，正規乱数
	モンテカルロ法
有限要素法（一次元）	形状関数，剛性行列，ビームの静的変形
	慣性行列，ビームの動的変形
有限要素法（二次元）	2D/3D 変形，2D/3D 形状関数
	2D/3D 慣性行列，2D/3D 剛性行列

スケジュール

4/ 8　数値計算とは　解析解，数値解
4/15　MATLAB　行列とベクトル，常微分方程式，グラフの表示
4/22　MATLAB　最適化，パラメータの引き渡し，乱数
4/27　常微分方程式　常微分方程式の標準形，状態変数，ルンゲ・クッタ法
4/29　常微分方程式　ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法，制約，制約安定
5/20　連立一次方程式　LU 分解，ピボット型 LU 分解
5/27　連立一次方程式　ピボット選択型 LU 分解，コレスキー分解
6/ 3　射影　射影行列，グラム・シュミットの直交化，QR 分解
6/10　補間　区分線形補間，スプライン補間
6/17　確率的アルゴリズム　乱数，一様乱数，正規乱数
6/24　確率的アルゴリズム　モンテカルロ法
7/ 1　有限要素法（一次元）　形状関数，剛性行列，ビームの静的変形
7/ 8　有限要素法（一次元）　慣性行列，ビームの動的変形
7/15　有限要素法（二次元）　2D/3D 変形，2D/3D 形状関数
7/20　有限要素法（二次元）　2D/3D 慣性行列，2D/3D 剛性行列

教科書

ウェブページ

http://www.ritsumei.ac.jp/~hirai/
「講義」→「2024 年度」「数値計算」をクリック

www.ritsumei.ac.jp/~hirai/edu/2024/algorithm/algorithm-j.html

資料はウェブサイトで配布

評価

レポート（manaba+R へアップロード，MATLAB Grader）
定期試験

manaba+R へのアップロード：pdf ファイルで manaba+R に提出

ファイル名：学籍番号（11 桁半角数字）名前（空白なし）.pdf
例えば　12345678901 平井慎一.pdf
　　　　12345678901HiraiShinichi.pdf
pdf ファイル以外は採点対象外
ワードや写真のファイルは pdf に変換し，アップすること

MATLAB Grader：PC あるいはスマートフォンで解答
MathWorks アカウントを Rainbow アカウントで作成しておく．
`https://jp.mathworks.com/mwaccount/register`

MATLAB 入門 (日本語)
`https://matlabacademy.mathworks.com/jp`

MATLABとは

1. 数値計算ソフトウェア
2. 行列やベクトルを扱うことが可能
3. 常微分方程式のソルバー，最適化計算等の関数
4. 様々な分野のためのツールボックス（toolbox）
5. プログラム，対話的の双方の利用が可能

MATLAB 環境

包括ライセンス

立命館大学で MATLAB 包括ライセンスを購入
全 Toolbox 使用可能
2018 年度から 2020 年度，2021 年度に更新

MATLAB のインストール

https://jp.mathworks.com/academia/tah-portal/ritsumeikan-university-40673840.html

MATLAB 環境

- MATLAB 環境を自分の PC あるいはスマートフォンにインストールする
- サンプルプログラムを講義のウェブサイトで提供
- レポートの解答に使う