

# 数値計算

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

## 数学とは

- 工学・技術・科学の言語である.
- 工学・技術・科学の道具である.

## 工学・技術・科学の言語である

We call the matrix  $C$  the *Coriolis matrix* for the manipulator; the vector  $C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}$  gives the Coriolis and centrifugal force terms in the equations of motion. Note that there are other ways to define the matrix  $C(\theta, \dot{\theta})$  such that  $C_{ij}(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_j = \Gamma_{ijk}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k$ . However, this particular choice has important properties which we shall later exploit.

Equation (4.21) can now be rewritten as

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (4.24)$$

where  $\tau$  is the vector of actuator torques and  $N(\theta, \dot{\theta})$  includes gravity terms and other forces which act at the joints. This is a second-order vector differential equation for the motion of the manipulator as a function of the applied joint torques. The matrices  $M$  and  $C$ , which summarize the inertial properties of the manipulator, have some important properties which we shall use in the sequel:

## 工学・技術・科学の言語である

Trong trường hợp lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế thì  $Q_j^* = 0$ . Khi đó phương trình Lagrange loại hai có dạng

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i=1, \dots, f) \quad (5.15)$$

Nếu ta đưa vào hệ thức

$$L = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) - \Pi(q_1, \dots, q_f)$$

thì phương trình (5.15) có dạng

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, \dots, f) \quad (5.16)$$

Chú ý. Trong trường hợp hệ các vật rắn chịu các liên kết hólônôm, phương trình Lagrange loại hai vẫn có dạng như (5.15). Ta công nhận không chứng minh.

## 工学・技術・科学の言語である

則式(e)可改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\epsilon_z \\ \tau_{yx} &= \mu\gamma_{yx} \\ \tau_{xz} &= \mu\gamma_{xz} \\ \tau_{zy} &= \mu\gamma_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

或

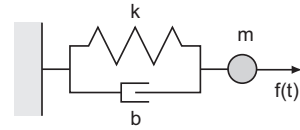
$$\sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \quad (4-12')$$

式(4-12)即各向同性弹性体的广义胡克定律,  $\lambda, \mu$  称为拉梅(Lamé, G.)常数。

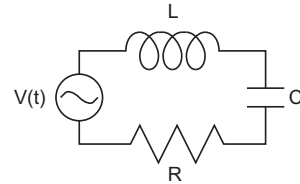
从式(4-12)容易看出,在各向同性体内的各点,应力主方向和应变主方向是一致的。事实上,如果将坐标轴取得与物体内某点的应变主方向重合,此时,所有的切应变分量为零。但由式(4-12)的后二式可知,此时切应力分量也必须为零,因此,这3个坐标轴的方向又是应力主方向,也即两者是一致的。

## 工学・技術・科学の道具である

質点・バネ・ダンパー系



LCR回路



## 工学・技術・科学の道具である

質点・バネ・ダンパー系の運動方程式

$$m\ddot{x} = f(t) - b\dot{x} - kx$$

LCR系の回路方程式

$$V(t) - Li - \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau - Ri = 0$$

微分方程式という道具でモデリングできる

## 工学・技術・科学の道具である

質点・バネ・ダンパー系の運動方程式

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ m\dot{v} &= -bv - kx + f(t) \end{aligned}$$

LCR系の回路方程式

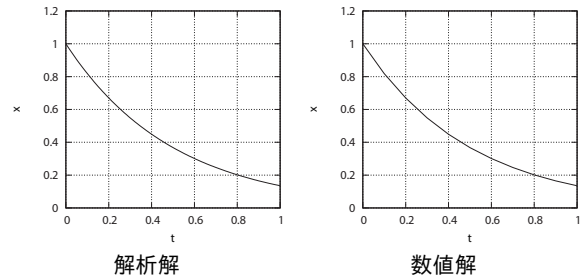
$$\begin{aligned} \dot{q} &= i \\ Li &= -Ri - \frac{1}{C}q + V(t) \end{aligned}$$

↓

数学的に同じ構造であることがわかる

微分と積分（特に微分）  
線形代数（行列とベクトル）

応用数学Ⅰ 微分方程式  
応用数学Ⅱ 複素数と複素関数  
数値計算 数値的に数学の問題を解く方法

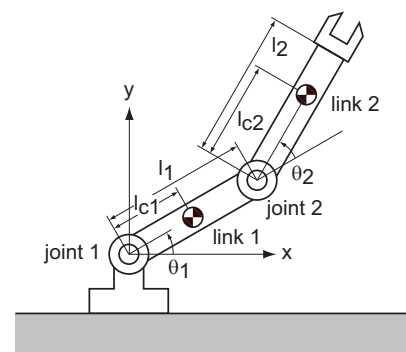


一般論は不要（後からで OK）  
説明が必要、証明は不要

力学，電子回路，制御工学等とのつながりを意識する

いろいろな道具を試してみる

二自由度リンク機構



微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$

解析的に解く：式の変形を通して解を求める。

解析解：

$$x(t) = x(0)e^{-2t}$$

任意の初期値に対して成り立つ。

二自由度リンク機構の運動方程式

$$H_{11}\ddot{\theta}_1 + H_{12}\ddot{\theta}_2 = h_{12}\dot{\theta}_2^2 + 2h_{12}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - G_1 - G_{12} + \tau_1,$$

$$H_{22}\ddot{\theta}_2 + H_{12}\ddot{\theta}_1 = -h_{12}\dot{\theta}_1^2 - G_{12} + \tau_2$$

ただし

$$H_{11} = J_1 + m_1 l_{c1}^2 + J_2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2)$$

$$H_{12} = J_2 + m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2)$$

$$H_{22} = J_2 + m_2 l_{c2}^2$$

$$h_{12} = m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2$$

$$G_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \theta_1$$

$$G_{12} = m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

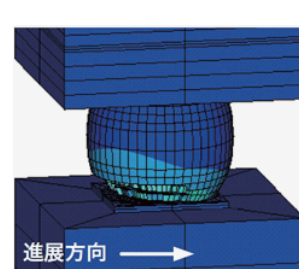
解析的に解くことができない

数値的に解く (シミュレーション)

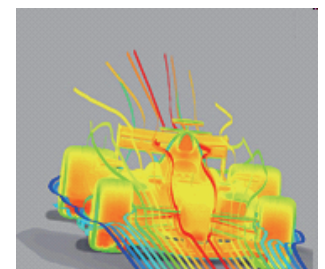
数値的に解く：数値の列で解を表す

数値解の例：オイラー法，微分方程式の初期値  $x(0) = 1.00$

t	x
0.000000	1.000000
0.100000	0.818567
0.200000	0.670052
0.300000	0.548482
0.400000	0.448969
0.500000	0.367511
0.600000	0.300833
0.700000	0.246252
0.800000	0.201573
0.900000	0.165001
1.000000	0.135065

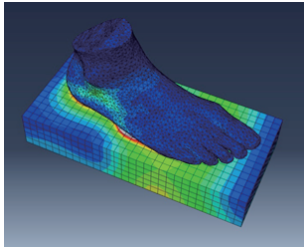


構造解析

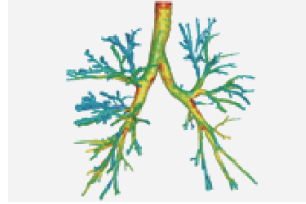


流体力学

# なぜ数値計算



歩行の解析



循環機能の解析

# ウェブページ

<http://www.ritsumeai.ac.jp/~hirai/>

「講義」→「2024年度」→「数値計算」をクリック

[www.ritsumeai.ac.jp/~hirai/edu/2024/algorithm/algorithm-j.html](http://www.ritsumeai.ac.jp/~hirai/edu/2024/algorithm/algorithm-j.html)

資料はウェブサイトで配布



## 講義内容

### MATLAB

行列とベクトル, 常微分方程式  
最適化, パラメータの受け渡し, 乱数  
標準形, 状態変数, ルンゲ・クッタ法  
ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法

### 常微分方程式

制約, 制約安定化法 (CSM)  
LU分解, ピボット型LU分解  
ピボット選択型LU分解, コレスキー分解

### 連立一次方程式

### 射影

射影行列, グラム・シュミットの直交化  
区分線形補間, スプライン補間

### 補間

### 確率的アルゴリズム

乱数, 一様乱数, 正規乱数  
モンテカルロ法

### 有限要素法 (一次元)

形状関数, 剛性行列, ビームの静的変形  
慣性行列, ビームの動的変形

### 有限要素法 (二次元)

2D/3D 変形, 2D/3D 形状関数  
2D/3D 慣性行列, 2D/3D 剛性行列

## スケジュール

- 4/8 数値計算とは 解析解, 数値解
- 4/15 MATLAB 行列とベクトル, 常微分方程式, グラフの表示
- 4/22 MATLAB 最適化, パラメータの引き渡し, 乱数
- 4/27 常微分方程式 常微分方程式の標準形, 状態変数, ルンゲ・クッタ法
- 4/29 常微分方程式 ルンゲ・クッタ・フェールベルグ法, 制約, 制約安定
- 5/20 連立一次方程式 LU分解, ピボット型LU分解
- 5/27 連立一次方程式 ピボット選択型LU分解, コレスキー分解
- 6/3 射影 射影行列, グラム・シュミットの直交化, QR分解
- 6/10 補間 区分線形補間, スプライン補間
- 6/17 確率的アルゴリズム 乱数, 一様乱数, 正規乱数
- 6/24 確率的アルゴリズム モンテカルロ法
- 7/1 有限要素法 (一次元) 形状関数, 剛性行列, ビームの静的変形
- 7/8 有限要素法 (一次元) 慣性行列, ビームの動的変形
- 7/15 有限要素法 (二次元) 2D/3D 変形, 2D/3D 形状関数
- 7/20 有限要素法 (二次元) 2D/3D 慣性行列, 2D/3D 剛性行列

## 教科書



## MATLAB とは

- ① 数値計算ソフトウェア
- ② 行列やベクトルを扱うことが可能
- ③ 常微分方程式のソルバー, 最適化計算等の関数
- ④ 様々な分野のためのツールボックス (toolbox)
- ⑤ プログラム, 対話的の双方の利用が可能

## MATLAB 環境

### 包括ライセンス

立命館大学で MATLAB 包括ライセンスを購入  
全 Toolbox 使用可能  
2018 年度から 2020 年度, 2021 年度に更新

### MATLAB のインストール

<https://jp.mathworks.com/academia/tah-portal/ritsumeikan-university-40673840.html>

## MATLAB 環境

- MATLAB 環境を自分の PC あるいはスマートフォンにインストールする
- サンプルプログラムを講義のウェブサイトで提供
- レポートの解答に使う