

# 数値計算：連立一次方程式

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

# 講義の流れ

## ① LU 分解

- LU 分解
- ピボット型 LU 分解
- ピボット選択型 LU 分解
- 組み込み関数

## ② コレスキー分解

## ③ 連立一次方程式

## ④ まとめ

# LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列                      上三角行列  
(対角要素はすべて 1)

# LU分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて1)

上三角行列

# LU分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて1)

上三角行列

# LU分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて1)

上三角行列

# LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

# LU分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて1)

上三角行列



# LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

# LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

# LU 分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて 1)

上三角行列

# LU分解

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

下三角行列  
(対角要素はすべて1)

上三角行列

# LU 分解

下三角行列 (Lower triangle matrix)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

上三角行列 (Upper triangle matrix)

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

# LU分解

任意の正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

LU分解 (LU decomposition)

$$A = LU$$

# LU 分解

正方行列  $A$  の要素 : 9 個

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

行列  $L$  の対角要素はすべて 1  $\implies$  未知数 9 個

# 連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

⇓

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

⇓



# 連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -1 & 2 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

# 連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -1 & 2 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

⇓

$$p = 3$$

$$q = -7 - (-2)p = -1$$

$$r = -2 - (-1)p - 2q = 3$$

# 連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -1 & 2 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ & -2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

⇓

$$3z = 3 \Rightarrow z = 1$$

$$-2y = -1 - z = -2 \Rightarrow y = 1$$

$$3x = 3 - (-2)y - (-1)z = 6 \Rightarrow x = 2$$

# ピボット型LU分解

4 次の正方行列

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 5 & -1 \\ 6 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

をLU分解

$$\begin{aligned} A_4 &= L_4 U_4 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# ピボット型LU分解

## ブロック分割

$$L_4 = \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ \hline l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cccc} 1 & & & & \\ \hline l_{21} & & & & \\ l_{31} & & L_3 & & \\ l_{41} & & & & \end{array} \right]$$
$$U_4 = \left[ \begin{array}{c|cccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \\ \hline & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \\ & & u_{33} & u_{34} & \\ & & & u_{44} & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|cccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \\ \hline & & & & \\ & & U_3 & & \end{array} \right]$$

# ピボット型LU分解

$$L_4 U_4 = \left[ \begin{array}{c|ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \hline l_{21}u_{11} & \begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} & + L_3 U_3 \end{array} \right]$$

⇓

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = -1, \quad u_{14} = 1$$

$$l_{21}u_{11} = -4, \quad l_{31}u_{11} = 6, \quad l_{41}u_{11} = 2$$

$$\begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ l_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{bmatrix} + L_3 U_3 = \begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

## ピボット型LU分解

行列  $U_4$  の 1 行目の要素  $u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}$  の値

$$u_{11} = 2, \quad u_{12} = 3, \quad u_{13} = -1, \quad u_{14} = 1$$

行列  $L_4$  の 1 列目の要素  $l_{21}, l_{31}, l_{41}$  の値

$$l_{21} = -4/u_{11} = -2, \quad l_{31} = 6/u_{11} = 3, \quad l_{41} = 2/u_{11} = 1$$

$$\begin{aligned} L_3 U_3 &= \begin{bmatrix} -7 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# ピボット型LU分解

3次の正方行列

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

をLU分解

$$\begin{aligned} A_3 &= L_3 U_3 \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline l_{32} & 1 & \\ l_{42} & l_{43} & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{44} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline l_{32} & & \\ l_{42} & & L_2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline & & U_2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

⇓



# ピボット型LU分解

$$L_3 U_3 = \left[ \begin{array}{c|cc} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ \hline l_{32}u_{22} & \begin{bmatrix} l_{32} \\ l_{42} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_{23} & u_{24} \end{bmatrix} + L_2 U_2 \end{array} \right]$$

↓

$$u_{22} = -1, \quad u_{23} = 3, \quad u_{24} = 1$$

$$l_{32} = (-2)/u_{22} = 2, \quad l_{42} = 2/u_{22} = -2$$

$$\begin{aligned} L_2 U_2 &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A_2 \end{aligned}$$

# ピボット型LU分解

2次の正方行列

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

をLU分解

$$\begin{aligned} A_2 &= L_2 U_2 \\ &= \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline l_{43} & L_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} u_{33} & u_{34} \\ \hline & U_1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

⇓

$$u_{33} = -2, \quad u_{34} = -1$$

$$l_{43} = 2/u_{33} = -1$$

$$L_1 U_1 = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = A_1$$

# ピボット型LU分解

1次の正方行列

$$A_1 = [ 3 ]$$

をLU分解

$$\begin{aligned} A_1 &= L_1 U_1 \\ &= [ 1 ] [ u_{44} ] \end{aligned}$$

↓

$$u_{44} = 3$$

# ピボット型LU分解

計算結果

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 1 & -2 & -1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ & -1 & 3 & 1 \\ & & -2 & -1 \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

行列  $A_4, A_3, A_2, A_1$  の (1, 1) 要素：ピボット  
ピボット型LU分解

# ピボット型LU分解

$$L = I_{n \times n}, \quad U = O_{n \times n}$$

for  $k = 1, 2, \dots, n$

for  $j = k, k + 1, \dots, n$

$$u_{kj} = a_{kj}$$

for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}}{u_{kk}}$$

for  $i = k + 1, \dots, n$

for  $j = k + 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik} u_{kj}$$

## LU\_pivot.m

```
L = eye(n,n); U = zeros(n,n);
for k=1:n
    for j=k:n
        U(k,j) = A(k,j);
    end
    for i=k+1:n
        L(i,k) = A(i,k)/U(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*U(k,j);
        end
    end
end
end
```

# LU\_pivot.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    2    -1    -5  
    3    -4     1  
   -2     7     3
```

```
>> LU_pivot
```

```
>> L
```

```
L =
```

```
    1.0000         0         0  
    1.5000    1.0000         0  
   -1.0000   -2.4000    1.0000
```

# LU\_pivot.m

```
>> U
```

```
U =
```

```
    2.0000   -1.0000   -5.0000  
         0   -2.5000    8.5000  
         0         0   18.4000
```

```
>> L*U
```

```
ans =
```

```
    2    -1    -5  
    3    -4     1  
   -2     7     3
```



# メモリ節約ピボット型LU分解

$a_{ij}$  の値は  $l_{ij}$  あるいは  $u_{ij}$  の計算のみに必要

$l_{ij}$  あるいは  $u_{ij}$  の計算結果を  $a_{ij}$  に格納

行列  $U$  の成分 : 対角成分と対角より上

行列  $L$  の成分 : 対角より下

for  $k = 1, 2, \dots, n$

for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$

$$a_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

for  $i = k + 1, \dots, n$

for  $j = k + 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$$

# LU\_pivot\_memorysaving.m

```
for k=1:n
    for i=k+1:n
        A(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
        end
    end
end
end
```

# LU\_pivot\_memorysaving.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    2    -1    -5  
    3    -4     1  
   -2     7     3
```

```
>> LU_pivot_memorysaving
```

```
>> A
```

```
A =
```

```
  2.0000  -1.0000  -5.0000  
  1.5000  -2.5000   8.5000  
 -1.0000  -2.4000  18.4000
```

# 計算できない場合

```
>> A
```

```
A =
```

```
    0    10    20
    2     1    10
   10     0     5
```

```
>> LU_pivot_memorysaving
```

```
>> A
```

```
A =
```

```
    0    10    20
  Inf -Inf -Inf
  Inf  NaN  NaN
```

# 計算できない場合

ピボット型 LU 分解は  $a_{kk} = 0$  のとき実行できない  
 $a_{kk}$  の値が 0 から離れている i.e. 絶対値が大きい方が望ましい



## ピボット選択

$a_{kk}$  の絶対値が最大となるように行列  $A$  の行を入れ替える

# ピボット選択型LU分解

4 次の正方行列

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

においてピボット選択

行列  $A_4$  の 1 列目の要素で最も絶対値が大きい : (2, 1) 要素の 8  
1 行目と 2 行目を交換

$$A'_4 = \left[ \begin{array}{c|ccc} 8 & 1 & 6 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

# ピボット選択型LU分解

ピボット型LU分解を一段実行

$$A'_4 = \left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline 0 & * & & \\ -1/4 & * & * & \\ 1/2 & * & * & * \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|ccc} 8 & 1 & 6 & -2 \\ \hline & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{array} \right]$$
$$A_3 = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -1/4 \\ 1/2 \end{array} \right] [ 1 \quad 6 \quad -2 ]$$
$$= \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 4 & -6 \\ 1/4 & 3/2 & 5/2 \\ -5/2 & -5 & 5 \end{array} \right]$$

# ピボット選択型LU分解

3次の正方行列

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1/4 & 3/2 & 5/2 \\ -5/2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

においてピボット選択

行列  $A_3$  の1列目の要素で最も絶対値が大きい : (3, 1) 要素の  $-5/2$   
1行目と3行目を交換

$$A'_3 = \left[ \begin{array}{c|cc} -5/2 & -5 & 5 \\ \hline 1/4 & 3/2 & 5/2 \\ 1 & 4 & -6 \end{array} \right]$$



# ピボット選択型LU分解

ピボット型LU分解を一段実行

$$A'_3 = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline -1/10 & * & \\ -2/5 & * & * \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|cc} -5/2 & -5 & 5 \\ \hline & * & * \\ & & * \end{array} \right]$$
$$A_2 = \left[ \begin{array}{cc} 3/2 & 5/2 \\ 4 & -6 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} -1/10 \\ -2/5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} -5 & 5 \end{array} \right]$$
$$= \left[ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{array} \right]$$

# ピボット選択型LU分解

2次の正方行列

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

においてピボット選択

行列  $A_2$  の1列目の要素で最も絶対値が大きい：(2, 1) 要素の2  
1行目と2行目を交換

$$A'_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 2 & -4 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \right]$$

ピボット型LU分解を一段実行

$$A'_2 = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 1/2 & * \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} 2 & -4 \\ \hline & * \end{array} \right]$$
$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

# 置換行列

行列  $A_4$  の 1 行目と 2 行目の交換を表す行列

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列  $P_{12}$  を左から乗ざると、1 行目と 2 行目が交換される

$$\begin{bmatrix} 2 \text{ 行目} \\ 1 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \\ 4 \text{ 行目} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \text{ 行目} \\ 2 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \\ 4 \text{ 行目} \end{bmatrix}$$

## 置換行列

行列  $A_3$  の 1 行目と 3 行目は,  $A_4$  の 2 行目と 4 行目に対応  
行列  $A_4$  の 2 行目と 4 行目の交換を表す行列

$$P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

行列  $A_2$  の 1 行目と 2 行目は,  $A_4$  の 3 行目と 4 行目に対応  
行列  $A_4$  の 3 行目と 4 行目の交換を表す行列

$$P_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# 置換行列

行を交換する過程

$$\begin{bmatrix} 2 \text{ 行目} \\ 4 \text{ 行目} \\ 1 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \end{bmatrix} \xleftarrow{P_{34} \times} \begin{bmatrix} 2 \text{ 行目} \\ 4 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \\ 1 \text{ 行目} \end{bmatrix} \xleftarrow{P_{24} \times} \begin{bmatrix} 2 \text{ 行目} \\ 1 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \\ 4 \text{ 行目} \end{bmatrix} \xleftarrow{P_{12} \times} \begin{bmatrix} 1 \text{ 行目} \\ 2 \text{ 行目} \\ 3 \text{ 行目} \\ 4 \text{ 行目} \end{bmatrix}$$

行の交換はまとめて

$$P = P_{34}P_{24}P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

と表される。

# 置換行列

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad P^T \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

⇓

$$P^{-1} = P^T$$

# ピボット選択型LU分解

行を交換した行列  $PA$  が LU 分解できる.

$$PA = LU$$

あるいは

$$A = P^T LU$$

行列  $PA$  の LU 分解を求める.

# ピボット選択型LU分解

行列  $A_4$  のLU分解式：

置換  $P_{12}$  は成されている。

置換  $P_{24}$  と  $P_{34}$  は成されていない。



置換  $P_{24}$  と  $P_{34}$  を適用する必要がある。

LU分解に置換行列を左から乗ずる：下三角行列の行が交換される。

行列  $A_4$  のLU分解式：

下三角行列の要素の列に、置換  $P_{24}$  と  $P_{34}$  を適用

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1/4 \end{bmatrix} \xleftarrow{P_{34} \times} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \xleftarrow{P_{24} \times} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$



# ピボット選択型LU分解

行列  $A_3$  のLU分解式：

置換  $P_{12}$  と  $P_{24}$  は成されている。

置換  $P_{34}$  は成されていない。



置換  $P_{34}$  を適用する必要がある。

行列  $A_3$  のLU分解式：

下三角行列の要素の列に、置換  $P_{34}$  を適用

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2/5 \\ -1/10 \end{bmatrix} \xleftarrow{P_{34} \times} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/10 \\ -2/5 \end{bmatrix}$$

# ピボット選択型LU分解

行列  $A_2$  のLU分解式：

置換  $P_{12}, P_{24}, P_{34}$  は成されている.

↓

置換を適用する必要はない.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

# ピボット選択型LU分解

行列  $PA$  の LU 分解

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1/2 & 1 & & & \\ 0 & -2/5 & 1 & & \\ -1/4 & -1/10 & 1/2 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 & -2 \\ & -5/2 & -5 & 5 \\ & & 2 & -4 \\ & & & 5 \end{bmatrix}$$

# ピボット選択型LU分解

$$L = I_{n \times n}, \quad U = O_{n \times n}$$

for  $k = 1, 2, \dots, n$

ピボット選択

行列  $A$  と  $L$  の更新

for  $j = k, k + 1, \dots, n$

$$u_{kj} = a_{kj}$$

for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}}{u_{kk}}$$

for  $i = k + 1, \dots, n$

for  $j = k + 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a_{ij} - l_{ik}u_{kj}$$

# ピボット選択型LU分解

## ピボット選択

$$p = k$$

for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$

if  $|a_{kp}| < |a_{kj}|$  then  $p = j$

## 行列 $A$ と $L$ の更新

for  $j = k, k + 1, \dots, n$

$a_{kj}$  の値と  $a_{pj}$  の値を交換

for  $j = 1, 2, \dots, k - 1$

$l_{kj}$  の値と  $l_{pj}$  の値を交換

## 置換行列の表現

行の交換を示す整数配列  $\text{index}$

初期状態  $\text{index} = [1, 2, \dots, n]^T$

$k$  行と  $p$  行を交換したとき、 $\text{index}(k)$  の値と  $\text{index}(p)$  の値を交換

置換行列  $P$

$$P_{k, \text{index}(k)} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

これ以外の要素の値は 0

$\text{index} = [2, 4, 1, 3]^T$  のとき

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## LU\_pivot\_select.m

```
L = eye(n,n);
U = zeros(n,n);
index = 1:n;

for k=1:n
    p = k; max = abs(A(k,k));
    for j=k+1:n
        if (max < abs(A(k,j)))
            p = j; max = abs(A(k,j));
        end
    end
    for j=k:n
        A([k,p],j) = A([p,k],j);
    end
end
```

## LU\_pivot\_select.m

```
for j=1:k-1
    L([k,p],j) = L([p,k],j);
end
index([k,p]) = index([p,k]);
for j=k:n
    U(k,j) = A(k,j);
end
for i=k+1:n
    L(i,k) = A(i,k)/U(k,k);
end
```



## LU\_pivot\_select.m

```
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - L(i,k)*U(k,j);
        end
    end
end
end

P = zeros(n,n);
for k=1:n
    P(k,index(k)) = 1;
end
```

# LU\_pivot\_select.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    0    10    20
    2     1    10
   10     0     5
```

```
>> LU_pivot_select
```

```
>> L
```

```
L =
```

```
  1.0000         0         0
         0    1.0000         0
  0.2000    0.1000    1.0000
```

# LU\_pivot\_select.m

```
>> U
```

```
U =
```

```
    10     0     5  
     0    10    20  
     0     0     7
```

```
>> L*U
```

```
ans =
```

```
    10     0     5  
     0    10    20  
     2     1    10
```

# LU\_pivot\_select.m

```
>> P
```

```
P =
```

```
    0    0    1
    1    0    0
    0    1    0
```

```
>> P'*L*U
```

```
ans =
```

```
    0    10    20
    2     1    10
   10     0     5
```

## LU\_pivot\_select\_memorysaving.m

```
index = 1:n;

for k=1:n
    p = k; max = abs(A(k,k));
    for j=k+1:n
        if (max < abs(A(k,j)))
            p = j; max = abs(A(k,j));
        end
    end
    for j=1:n
        A([k,p],j) = A([p,k],j);
    end
    index([k,p]) = index([p,k]);
end
```

## LU\_pivot\_select\_memorysaving.m

```
for i=k+1:n
    A(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
end
for i=k+1:n
    for j=k+1:n
        A(i,j) = A(i,j) - A(i,k)*A(k,j);
    end
end
end
end

P = zeros(n,n);
for k=1:n
    P(k,index(k)) = 1;
end
```

# 関数 lu

ファイル lu\_decompose.m

```
A = [ 2, -1, -5; ...  
      3, -4,  1; ...  
      -2,  7,  3 ];  
[L,U,P] = lu(A);
```

$$\Rightarrow \quad PA = LU \quad \text{or} \quad A = P^T LU$$

# 関数 lu

```
>> lu_decompose
```

```
>> L
```

```
L =
```

1.0000	0	0
-0.6667	1.0000	0
0.6667	0.3846	1.0000



# 関数 lu

```
>> U
```

```
U =
```

```
 3.0000  -4.0000  1.0000
         0   4.3333  3.6667
         0         0 -7.0769
```

```
>> P
```

```
P =
```

```
 0  1  0
 0  0  1
 1  0  0
```

# 関数 lu

```
>> A
```

```
A =
```

```
    2    -1    -5  
    3    -4     1  
   -2     7     3
```

```
>> P'*L*U
```

```
ans =
```

```
    2    -1    -5  
    3    -4     1  
   -2     7     3
```

# コレスキー分解

## コレスキー分解 (Cholesky decomposition)

正定対称行列  $A$

↓

下三角行列  $L$

$$A = LL^T$$

or

上三角行列  $U$

$$A = U^T U$$

LU 分解の特別な場合

# コレスキー分解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 3 & & \\ -1 & 1 & 1 & \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & \\ 1 & -1 & & \\ 2 & & & \end{bmatrix}$$

# 正定対称行列

## 正定

二次形式が正 ( $x = \mathbf{0}$  のときのみ 0)

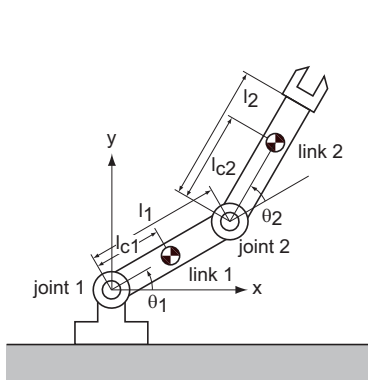
$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

## 対称

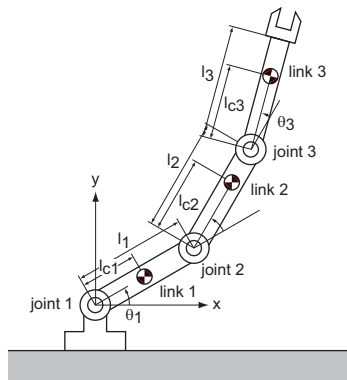
$$a_{ij} = a_{ji}$$

# 正定対称行列

## 慣性行列



$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix}$$



$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33} \end{bmatrix}$$

# コレスキー分解

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

行列  $A$  の独立な要素 : 10 個 (対角要素 4 個, 非対角要素  ${}_4C_2 = 6$  個)

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

行列  $U$  の未知要素 : 10 個 (対角要素 4 個, 非対角要素  ${}_4C_2 = 6$  個)

# コレスキー分解

4 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{12} & u_{22} & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$u_{11}^2 = a_{11} \implies u_{11} = (a_{11})^{1/2} = 2$$

$$u_{11} u_{12} = a_{12} \implies u_{12} = \frac{a_{12}}{u_{11}} = 1$$

$$u_{11} u_{13} = a_{13} \implies u_{13} = \frac{a_{13}}{u_{11}} = -1$$

$$u_{11} u_{14} = a_{14} \implies u_{14} = \frac{a_{14}}{u_{11}} = 1$$



# コレスキー分解

4 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ u_{12} & u_{22} & & \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

# コレスキー分解

3 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{22} & & \\ u_{23} & u_{33} & \\ u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$u_{22}^2 = a_{22} \implies u_{22} = (a_{22})^{1/2} = 3$$

$$u_{22} u_{23} = a_{23} \implies u_{23} = \frac{a_{23}}{u_{22}} = 1$$

$$u_{22} u_{24} = a_{24} \implies u_{24} = \frac{a_{24}}{u_{22}} = -2$$

# コレスキー分解

3次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{22} & & \\ u_{23} & u_{33} & \\ u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & u_{33} & u_{34} \\ & & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

# コレスキー分解

2次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{33} & \\ u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$u_{33}^2 = a_{33} \implies u_{33} = (a_{33})^{1/2} = 1$$

$$u_{33}u_{34} = a_{34} \implies u_{34} = \frac{a_{34}}{u_{33}} = -1$$

# コレスキー分解

2次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{33} & \\ u_{34} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{33} & u_{34} \\ & u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [a_{44}] &\leftarrow [5] - [-1] [-1] \\ &= [4] \end{aligned}$$

# コレスキー分解

1 次の正方行列をコレスキー分解

$$\begin{bmatrix} u_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$u_{44}^2 = a_{44} \implies u_{44} = (a_{44})^{1/2} = 2$$

# コレスキー分解

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 10 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 3 & & \\ -1 & 1 & 1 & \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ & 3 & 1 & -2 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

# コレスキー分解のアルゴリズム

$$L = O_{n \times n}$$

for  $k = 1, 2, \dots, n$

$$u_{kk} = (a_{kk})^{1/2}$$

for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$

$$u_{ki} = \frac{a_{ki}}{u_{kk}}$$

for  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$

for  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$

$$a_{ij} = a_{ij} - u_{ki}u_{kj}$$



## cholesky.m

```
U = zeros(n,n);

for k=1:n
    U(k,k) = sqrt(A(k,k));
    for i=k+1:n
        U(k,i) = A(k,i)/U(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - U(k,i)*U(k,j);
        end
    end
end
end
```

# cholesky.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    4     2    -2     2
    2    10     2    -5
   -2     2     3    -4
    2    -5    -4    10
```

```
>> cholesky
```

```
>> U
```

```
U =
```

```
    2     1    -1     1
    0     3     1    -2
    0     0     1    -1
    0     0     0     2
```

# cholesky.m

```
>> U'*U
```

```
ans =
```

```
    4     2    -2     2  
    2    10     2    -5  
   -2     2     3    -4  
    2    -5    -4    10
```

## cholesky\_memorysaving.m

$a_{ij}$  の値は  $u_{ij}$  の計算のみに必要  $u_{ij}$  の計算結果を  $a_{ij}$  に格納  
行列  $U$  の成分：行列  $A$  の対角成分と対角より上に格納

```
for k=1:n
    A(k,k) = sqrt(A(k,k));
    for i=k+1:n
        A(k,i) = A(k,i)/A(k,k);
    end
    for i=k+1:n
        for j=k+1:n
            A(i,j) = A(i,j) - A(k,i)*A(k,j);
        end
    end
end
end
```

## cholesky\_memorysaving.m

```
>> A
```

```
A =
```

```
    4     2    -2     2
    2    10     2    -5
   -2     2     3    -4
    2    -5    -4    10
```

```
>> cholesky_memorysaving
```

```
>> A
```

```
A =
```

```
    2     1    -1     1
    2     3     1    -2
   -2     3     1    -1
    2    -6    -1     2
```

# 関数 chol

ファイル cholesky\_decompose.m

```
A = [ 4,  2, -2,  2; ...  
      2, 10,  2, -5; ...  
     -2,  2,  3, -4; ...  
      2, -5, -4, 10 ];  
[U] = chol(A);
```

# 関数 chol

```
>> cholesky_decompose
```

```
>> U
```

```
U =
```

```
    2    1   -1    1
    0    3    1   -2
    0    0    1   -1
    0    0    0    2
```

```
>> U'*U
```

```
ans =
```

```
    4    2   -2    2
    2   10    2   -5
   -2    2    3   -4
    2   -5   -4   10
```

## コレスキー分解による正定性の判定

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$u_{11}^2 = 1 \implies u_{11} = 1 \quad u_{12}u_{11} = 3 \implies u_{12} = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$3^2 + u_{22}^2 = 5 \implies u_{22}^2 = -4$$

行列は正定でない



コレスキー分解できない

対称行列にコレスキー分解のアルゴリズムを適用  
⇒ 行列が正定か否かを判定することができる



# 連立一次方程式を解く

連立一次方程式を解く

```
>> A = [ 3, 2, -2; ...  
        6, 2, -1; ...  
        -3, -8, 7 ];  
>> b = [ 1; 3; 6 ];  
>> A\b
```

ans =

```
1.0000  
-2.0000  
-1.0000
```

# 連立一次方程式を解く

```
>> A\b
```

- Step 1 行列  $A$  が三角行列であることを調べる  
三角行列である場合，三角行列用の計算を実行
- Step 2 行列  $A$  が対称である場合，コレスキー分解を実行  
可能ならばコレスキー分解を用いて連立一次方程式を解く
- Step 3 コレスキー分解に失敗した場合は，LU 分解を実行  
LU 分解を用いて連立一次方程式を解く



オペレータ `\` は効率が良くない

LU 分解を明示的に実行 (ファイル `le_solve_LU.m`)

コレスキー分解を明示的に実行 (係数行列が正定対称の場合)  
(ファイル `le_solve_Cholesky.m`)

# 連立一次方程式を解く

## LU分解を用いて連立一次方程式を解く

$$PA = LU$$

$$Ax = b$$

↓

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

↓

$Ly = Pb$  最初の式から解き  $y$  を求める

$Ux = y$  最後の式から解き  $x$  を求める

# le\_solve\_LU.m

ファイル le\_solve\_LU.m

```
A = [ 3,  2, -2; ...  
      6,  2, -1; ...  
      -3, -8,  7 ];
```

```
b = [ 1; 3; 6 ];
```

```
[L,U,P] = lu(A);
```

```
y = L\(P*b);
```

```
x = U\y;
```

```
x
```

# le\_solve\_LU.m

```
>> le_solve_LU
```

```
x =
```

```
    1.0000  
   -2.0000  
   -1.0000
```

# 連立一次方程式を解く

コレスキー分解を用いて連立一次方程式を解く

$$M = U^T U$$

$$Mx = b$$

⇓

$$U^T Ux = b$$

⇓

$U^T y = b$  最初の式から解き  $y$  を求める

$Ux = y$  最後の式から解き  $x$  を求める

# le\_solve\_Cholesky.m

ファイル le\_solve\_Cholesky.m

```
M = [ 4,  -2, -2; ...  
      -2,  2,  0; ...  
      -2,  0,  3 ];
```

```
b = [ 2; 2; -5 ];
```

```
U = chol(M);
```

```
y = U'\b;
```

```
x = U\y;
```

```
x
```

# le\_solve\_Cholesky.m

```
>> le_solve_Cholesky
```

```
x =
```

```
1
```

```
2
```

```
-1
```



# まとめ

## LU 分解

正方行列  $A$  を下三角行列  $L$  と上三角行列  $U$  の積で表す

$$A = LU$$

$$PA = LU(\text{ピボット選択: 置換行列 } P)$$

## コレスキー分解

正定対称行列  $A$

$$A = LL^T \quad A = U^T U$$

## 線形計算

LU 分解/コレスキー分解を用いて連立一次方程式を解く

# レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「連立一次方程式」

締切：2024年6月3日（月曜）00:10 AM