数値計算：確率的アルゴリズム

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

1. 乱数
2. モンテカルロ法
3. まとめ

乱数

コンピュータ上でサイコロを模擬する.

$$D = \begin{cases} 1 & X \in [\ \ 0, 1/6\,) \\ 2 & X \in [1/6, 2/6\,) \\ 3 & X \in [2/6, 3/6\,) \\ 4 & X \in [3/6, 4/6\,) \\ 5 & X \in [4/6, 5/6\,) \\ 6 & X \in [5/6, \ \ 1\,) \end{cases}$$

X は区間 $(\,0,\,1\,)$ 内の一様乱数

$$X \sim U(0,1)$$

uniform.m

関数 rand　　区間 (0, 1) 内の一様乱数

```
for i=1:10
    x = rand;
    s = num2str(x);
    disp(s);
end
```

uniform.m

```
>> uniform
0.81472
0.90579
0.12699
0.91338
0.63236
0.09754
0.2785
0.54688
0.95751
0.96489
>> uniform
0.15761
0.97059
0.95717
0.48538
```

dice.m

```
function k = dice()
%   simulating a dice
    x = rand;
    if x < 1/6.00          k = 1;
    elseif x < 2/6.00      k = 2;
    elseif x < 3/6.00      k = 3;
    elseif x < 4/6.00      k = 4;
    elseif x < 5/6.00      k = 5;
    else                   k = 6;
    end
end
```

dice_run.m

```
for i=1:10
    s = [];
    for j=1:10
        k = dice();
        s = [s, ' ', num2str(k)];
    end
    disp(s);
end
```

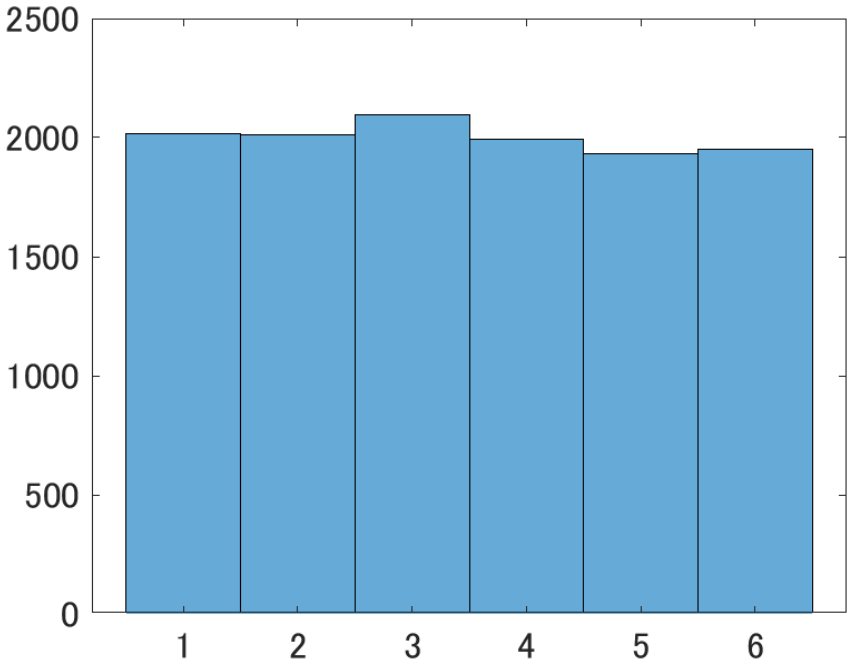
dice_run.m

```
>> dice_run
 2 4 6 5 6 3 3 4 2 5
 4 4 2 1 3 3 5 5 5 1
 1 4 2 6 6 2 5 6 4 6
 6 4 5 4 1 3 4 4 3 6
 5 6 3 4 6 6 5 2 4 1
 3 5 6 5 3 5 3 6 6 6
 3 3 2 5 6 6 4 4 1 6
 3 2 6 5 6 2 5 4 1 3
 2 5 2 6 5 3 3 5 6 4
 4 2 3 5 6 5 1 5 3 3
>> dice_run
 1 5 2 2 3 3 4 4 3 3
 4 4 6 5 3 5 1 1 1 1
 2 2 1 4 1 1 4 6 6 4
 6 4 4 2 3 3 1 6 1 3
```

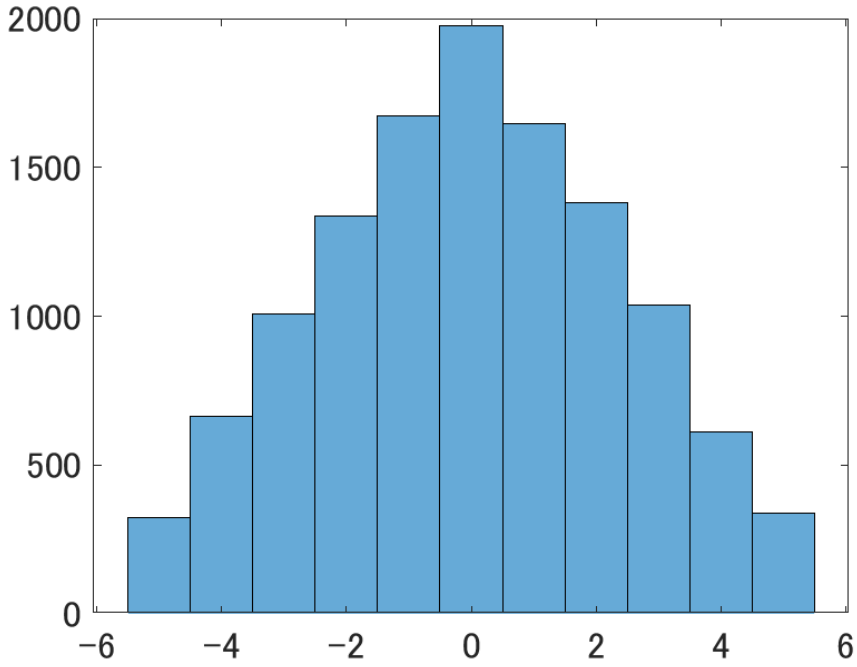
dice_validation.m

```
n = 12000;

for k=1:n
    a(k) = dice();
end

histogram(a);
fprintf("サイコロの目の頻度\n");
fprintf("一時停止：何かのキーを押してください\n");
pause;

d = a(2:n) - a(1:n-1);
histogram(d);
fprintf("差の頻度\n");
fprintf("一時停止：何かのキーを押してください\n");
pause;
```

dice_validation.m



ヒストグラム

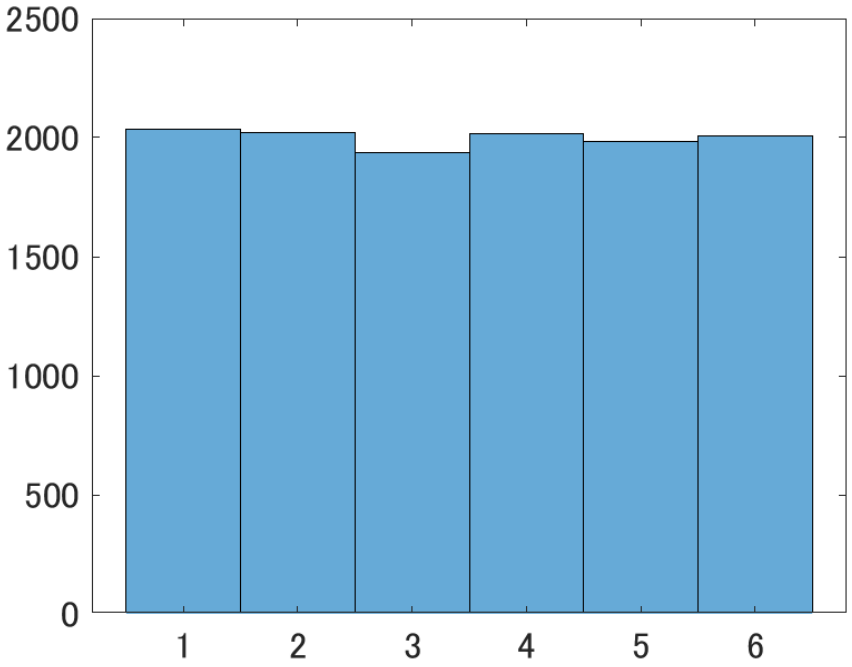


差のヒストグラム

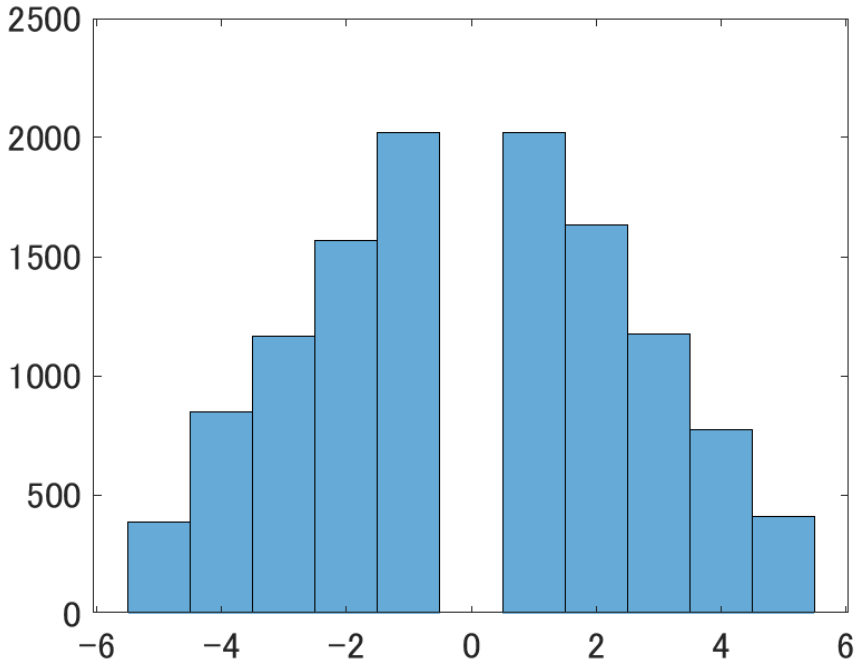
dice_false_run.m

```
>> dice_false_run
3 2 5 3 4 5 1 5 6 5
2 5 3 6 4 3 4 3 5 6
3 6 3 4 2 1 2 4 3 4
6 4 2 5 4 3 4 2 3 1
2 6 3 2 5 6 1 3 1 6
5 6 5 2 4 5 4 5 3 5
2 4 1 2 1 4 6 3 4 3
5 6 5 1 6 1 4 6 4 6
2 6 2 1 4 2 4 3 4 3
4 3 5 3 5 1 2 1 2 6
>> dice_false_run
4 1 6 4 2 3 6 5 2 1
6 2 3 1 4 6 5 3 2 3
5 1 3 1 2 6 4 2 1 4
1 4 3 4 5 2 3 4 1 6
```

dice_false_validation.m



ヒストグラム



差のヒストグラム

一様乱数 $U(a, b)$

$U(a, b)$

区間 (a, b) 内の一様乱数

$$X \sim U(0, 1)$$
$$Y \sim U(a, b)$$

$$Y = (b - a)X + a$$

正規乱数 $N(0,1)$

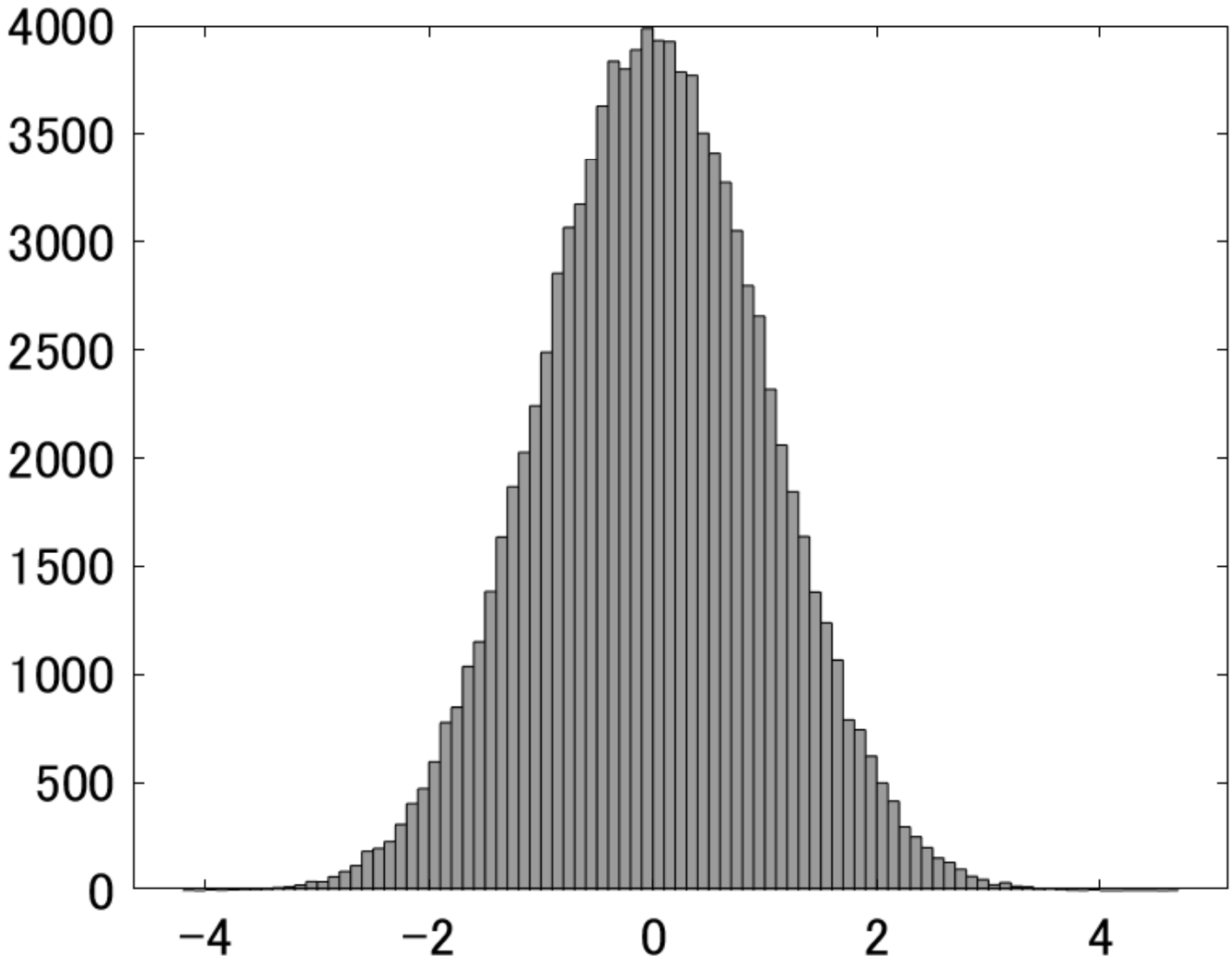
$N(0,1)$

平均 0，標準偏差 1 (分散 $1^2 = 1$) の正規分布に従う乱数

ファイル `normal_histogram.m`

```
a = randn(100000,1);
histogram(a);
saveas(gcf, 'normal_histogram.eps', 'eps');
```

normal_histogram.m



正規乱数 $N(\mu, \sigma)$

$N(\mu, \sigma)$

平均 μ，標準偏差 σ (分散 σ^2) の正規分布に従う乱数

$$X \sim N(0, 1)$$
$$Y \sim N(\mu, \sigma)$$

$$Y = \sigma X + \mu$$

ノイズのシミュレーション

観測信号

$$x(t) = A \sin 2\pi f t + \varepsilon(t)$$

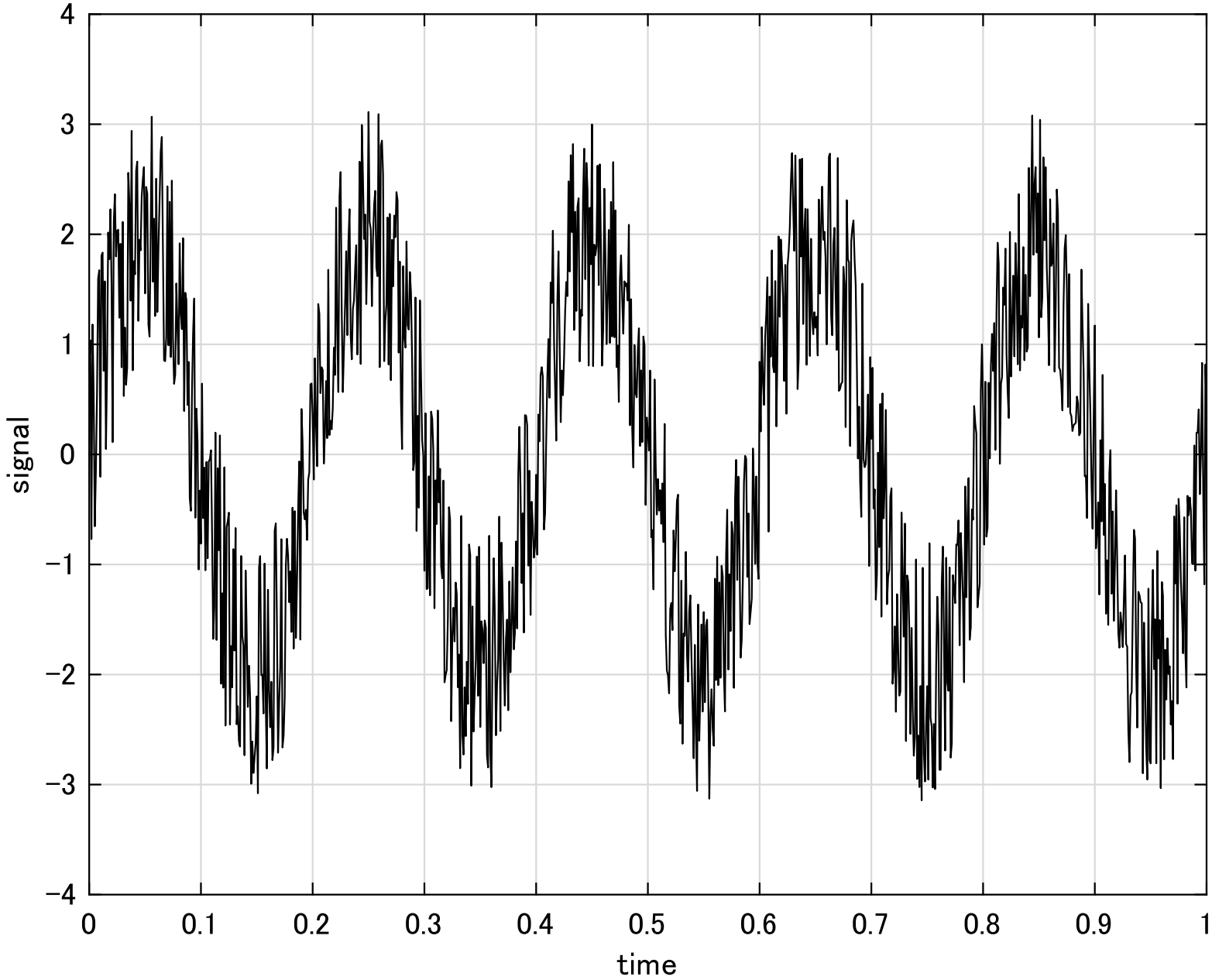
源信号　ノイズ

源信号のパラメータ $A = 2.0$, $f = 5$
ノイズの特性

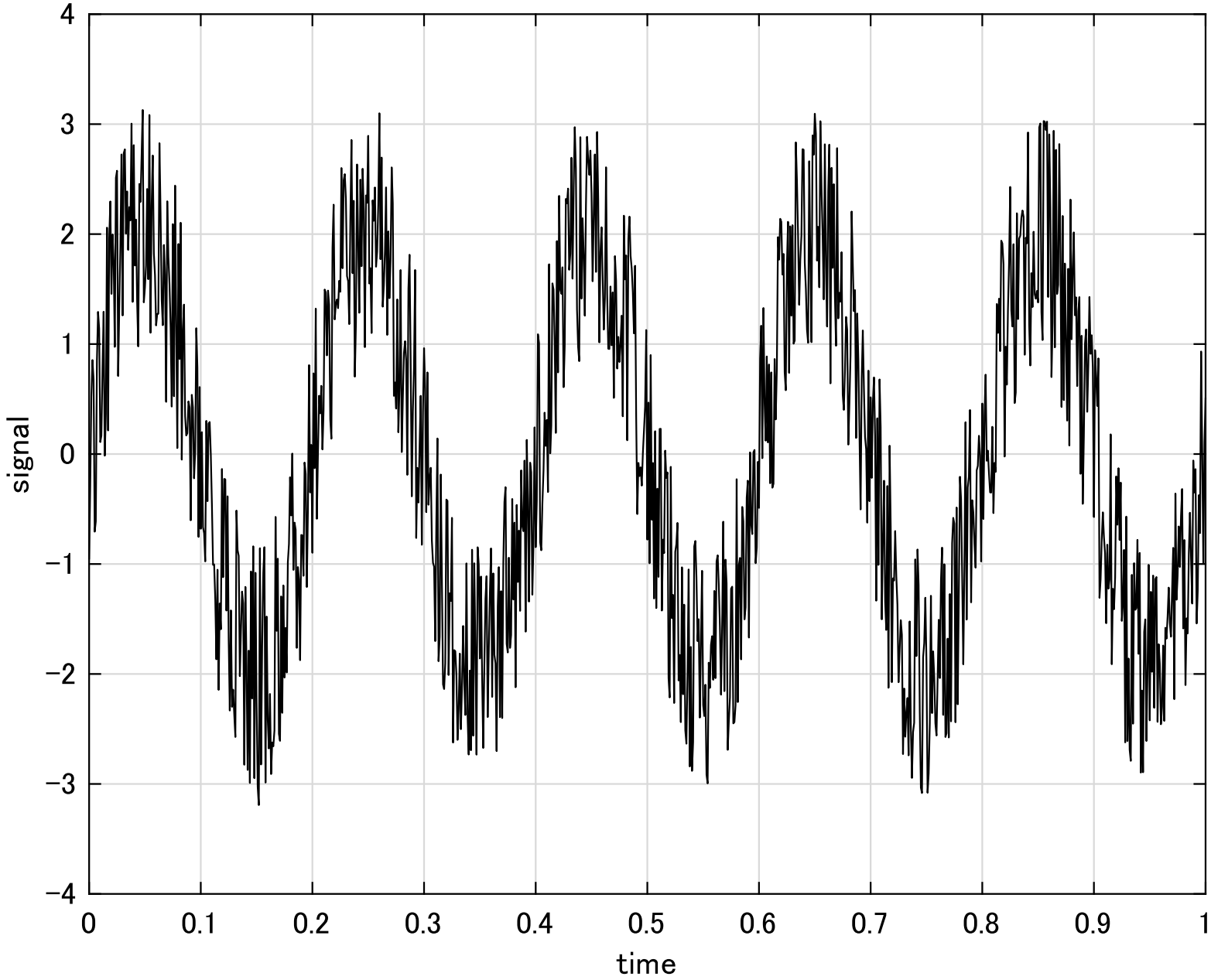
$$\varepsilon(t) \sim U(-\alpha, \alpha)$$

ノイズのパラメータ $\alpha = 1.2$
サンプリング時間 $T = 0.001$

ノイズのシミュレーション



ノイズのシミュレーション



モンテカルロ法

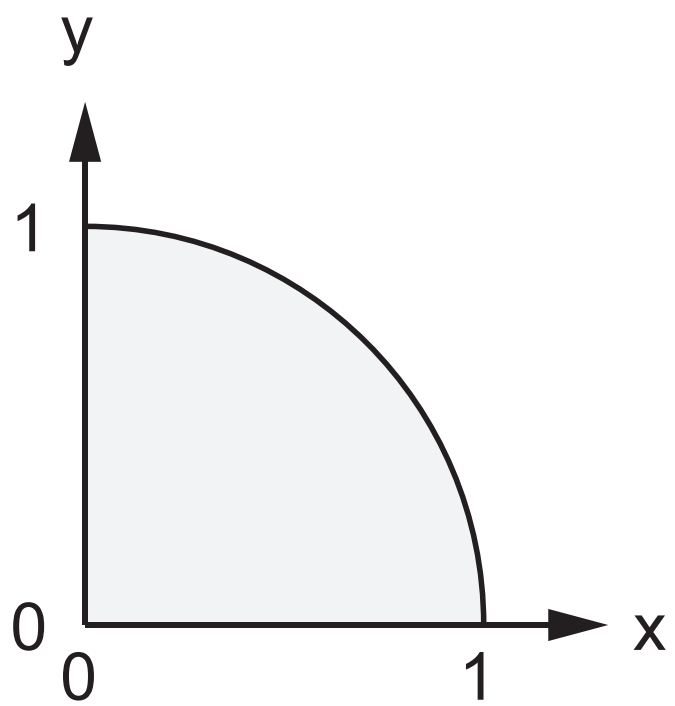
計算に時間や手間を要する問題を，乱数を用いて近似的に解く手法

定積分の計算

定積分

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

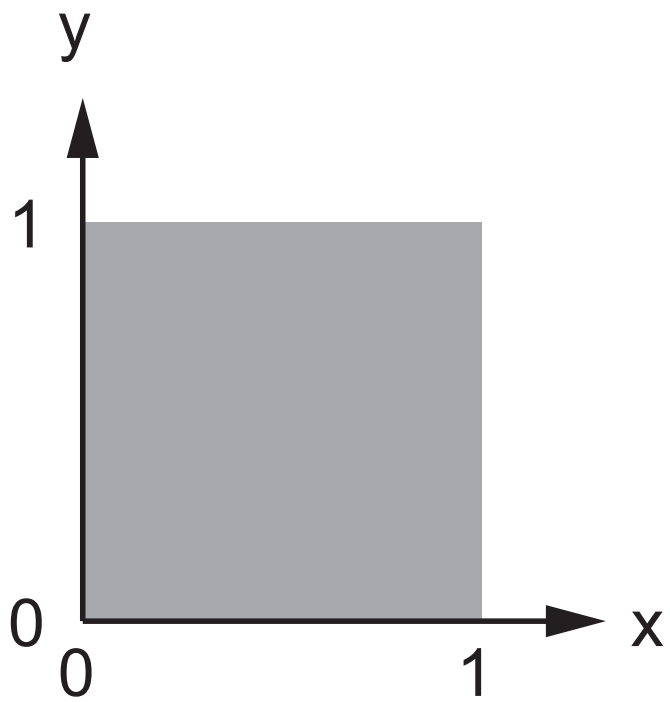
被積分関数　$y = \sqrt{1 - x^2}$

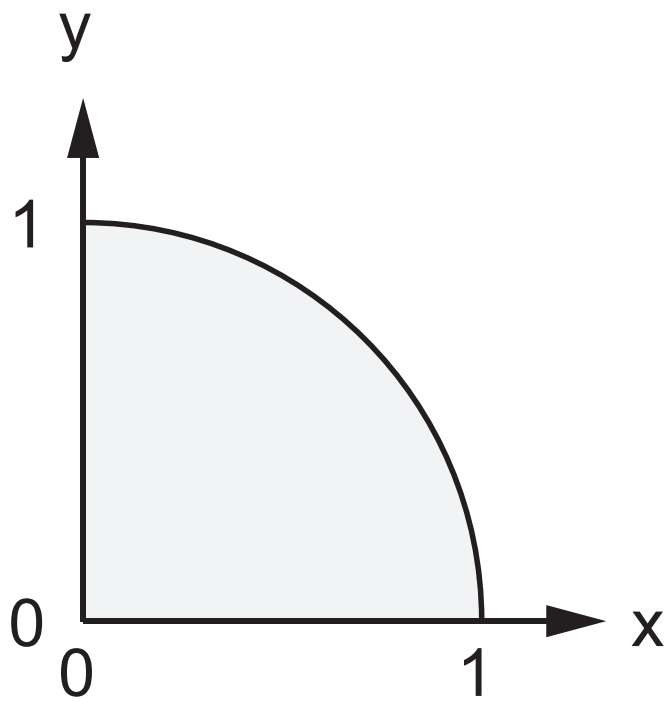


定積分の計算

$x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]$
点 (x, y) を領域 $0 \leq x, y \leq 1$ の中でランダムに発生させる.

$$x \sim U(0, 1), \quad y \sim U(0, 1)$$





N：発生させた点の個数　　M：$y \leq \sqrt{1 - x^2}$ を満たす点の個数

定積分の計算

$$M : N = S_1 : 1$$

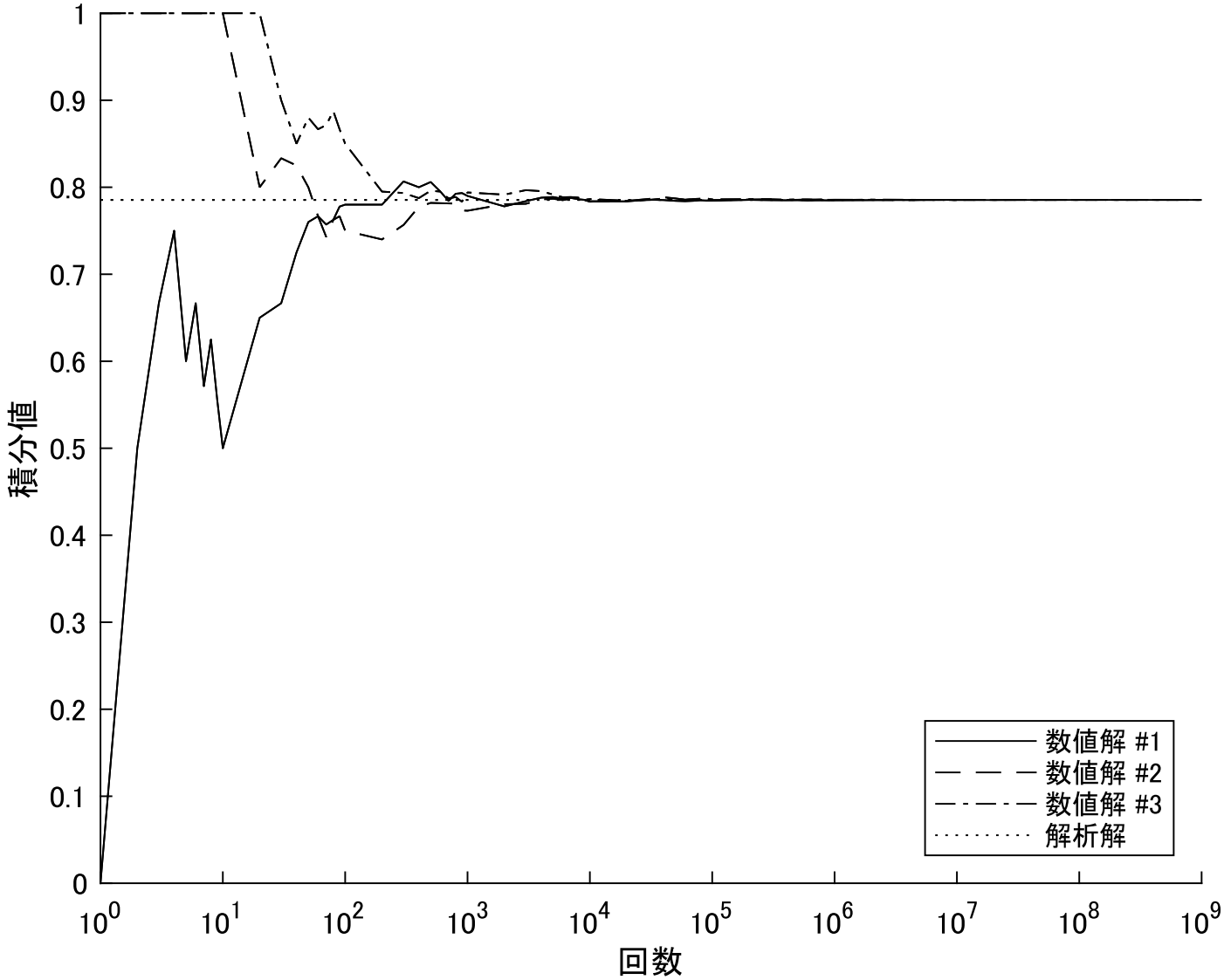
$$\Downarrow$$

$$S_1 = \frac{M}{N}$$

integral_S1.m

```
N = 1000000000; M = 0; k = 1; step = 10;
for i=1:N
    x = rand;     y = rand;
    if x*x + y*y <= 1
        M = M+1;
    end
    if rem(i,step) == 0
        s = [num2str(i), ' ', num2str(M/i)];
        disp(s); k = k+1;
    end
    if k == 10
        step = step * 10; k = 1;
    end
end
```

定積分の計算


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
積分値
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
回数
数値解 #1
数値解 #2
数値解 #3
解析解

多重定積分の計算

多重定積分

$$S_n = \int \int \cdots \int_{D_n} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \cdots\, \mathrm{d}x_n$$

積分領域

$$D_n = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1, \right. \\ \left. x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \right\}$$

被積分関数

$$y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$$

多重定積分の計算

$x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0, 1], \quad y \in [0, 1]$
点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ をランダムに発生させる.

$$(0 \leq x_1, x_2, \cdots, x_n, y \leq 1)$$

$$x_1 \sim U(0,1),\ x_2 \sim U(0,1),\ \cdots,\ x_n \sim U(0,1),\ y \sim U(0,1)$$

N : 発生させた点の個数
M : $y \leq \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}$ を満たす点の個数

多重定積分の計算

$$M : N = S_n : 1$$

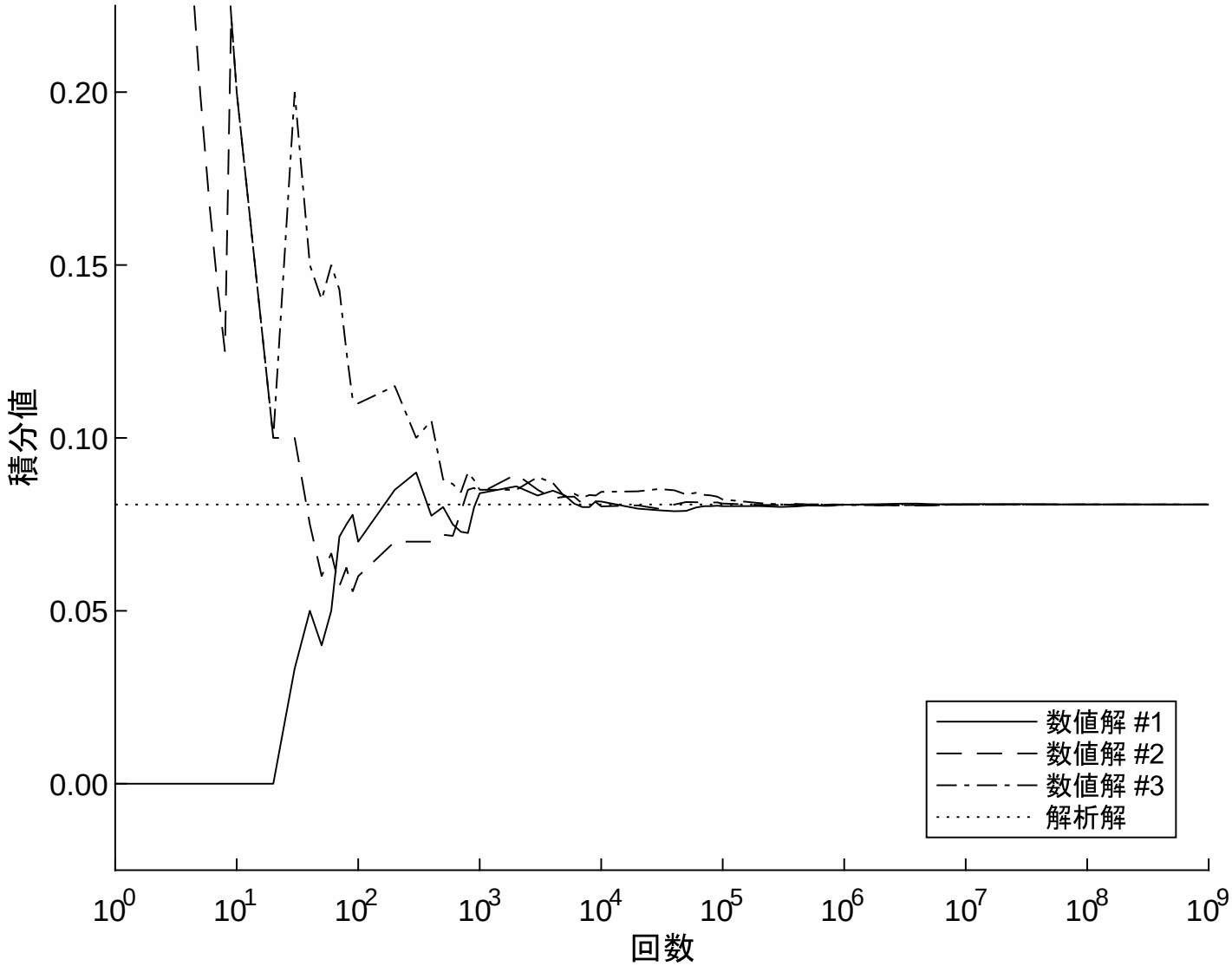
$$\Downarrow$$

$$S_n = \frac{M}{N}$$

integral_S5.m

```
N = 1000000000; M = 0; k = 1; step = 10;
for i=1:N
    x1 = rand; x2 = rand; x3 = rand; x4 = rand; x5 = rand
    y = rand;
    if x1*x1 + x2*x2 + x3*x3 + x4*x4 + x5*x5 + y*y <= 1
        M = M+1;
    end
    if rem(i,step) == 0
        s = [num2str(i), ' ', num2str(M/i)];
        disp(s); k = k+1;
    end
    if k == 10
        step = step * 10; k = 1;
    end
end
```

多重定積分 S_5 の計算


0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
積分値
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
10^9
回数
数値解 #1
数値解 #2
数値解 #3
解析解

同じ誕生日

問題

n 人のグループで．誕生日が同じ人たちがいる確率を求める．

問題を簡単にするため，2 月 29 日は考えない．
誕生日の確率分布は，一様であると仮定する．

同じ誕生日

問題

n 人のグループで．誕生日が同じ人たちがいる確率を求める．

問題を簡単にするため，2 月 29 日は考えない．
誕生日の確率分布は，一様であると仮定する．

モンテカルロシミュレーションで解く．

- 1 月 1 日，1 月 2 日，1 月 3 日，$\cdots$，12 月 31 日に，
  $1, 2, 3, \cdots, 365$ を対応させる．
- 一様に値 $1, 2, 3, \cdots, 365$ を取る乱数を，n 個発生させる．
- n 個の値の中に同じ値があるか否かを調べる．
- 以上の試行を複数回繰返し，同じ値がある頻度を数える．

same_birthday_simulation.m

```
n = 23; same = 0; diff = 0;
for iteration=1:1000
    birthday = ceil(365*rand(1,n));
    found = 0;
    for k=1:n
        if ismember(birthday(k), birthday(k+1:n))
            found = 1;
            break;
        end
    end
    if found
        same = same + 1;
    else
        diff = diff + 1;
    end
end
```

同じ誕生日

$n = 5$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

5 人	同じ人がいる 24 回	すべて異なる 976 回
5 人	同じ人がいる 21 回	すべて異なる 979 回
5 人	同じ人がいる 28 回	すべて異なる 972 回
5 人	同じ人がいる 39 回	すべて異なる 961 回
5 人	同じ人がいる 26 回	すべて異なる 974 回
5 人	同じ人がいる 24 回	すべて異なる 976 回
5 人	同じ人がいる 24 回	すべて異なる 976 回
5 人	同じ人がいる 27 回	すべて異なる 973 回
5 人	同じ人がいる 29 回	すべて異なる 971 回
5 人	同じ人がいる 33 回	すべて異なる 967 回

同じ誕生日

$n = 23$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

23 人	同じ人がいる	493 回	すべて異なる	507 回
23 人	同じ人がいる	496 回	すべて異なる	504 回
23 人	同じ人がいる	511 回	すべて異なる	489 回
23 人	同じ人がいる	514 回	すべて異なる	486 回
23 人	同じ人がいる	476 回	すべて異なる	524 回
23 人	同じ人がいる	507 回	すべて異なる	493 回
23 人	同じ人がいる	530 回	すべて異なる	470 回
23 人	同じ人がいる	519 回	すべて異なる	481 回
23 人	同じ人がいる	501 回	すべて異なる	499 回
23 人	同じ人がいる	531 回	すべて異なる	469 回

同じ誕生日

$n = 30$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

30 人	同じ人がいる	708 回	すべて異なる	292 回
30 人	同じ人がいる	684 回	すべて異なる	316 回
30 人	同じ人がいる	717 回	すべて異なる	283 回
30 人	同じ人がいる	712 回	すべて異なる	288 回
30 人	同じ人がいる	713 回	すべて異なる	287 回
30 人	同じ人がいる	708 回	すべて異なる	292 回
30 人	同じ人がいる	701 回	すべて異なる	299 回
30 人	同じ人がいる	690 回	すべて異なる	310 回
30 人	同じ人がいる	716 回	すべて異なる	284 回
30 人	同じ人がいる	724 回	すべて異なる	276 回

同じ誕生日

$n = 50$ で，頻度を 10 回数えた結果の例

50	人	同じ人がいる	974	回	すべて異なる 26 回
50	人	同じ人がいる	968	回	すべて異なる 32 回
50	人	同じ人がいる	972	回	すべて異なる 28 回
50	人	同じ人がいる	964	回	すべて異なる 36 回
50	人	同じ人がいる	967	回	すべて異なる 33 回
50	人	同じ人がいる	962	回	すべて異なる 38 回
50	人	同じ人がいる	970	回	すべて異なる 30 回
50	人	同じ人がいる	981	回	すべて異なる 19 回
50	人	同じ人がいる	967	回	すべて異なる 33 回
50	人	同じ人がいる	982	回	すべて異なる 18 回

同じ誕生日

2 月 29 日を考慮

$\Rightarrow$ 2 月 29 日に値 366 を対応させる
乱数が 366 となる確率は，他の値の確率の 1/4

誕生日の確率分布を考慮

$\Rightarrow$ 確率分布を乱数の発生確率に反映させる

$\Downarrow$

モンテカルロ法は，様々な条件に対応することができる

二人零和ゲーム

プレーヤー A と B が対戦
各プレーヤーは手 P, Q を選択する.

プレーヤー A の利得

		B	
		P	Q
A	P	$+5$	-8
	Q	-2	$+5$

A が手 P，B が手 P $\rightarrow$ A が $+5$，B が -5
A が手 P，B が手 Q $\rightarrow$ A が -8，B が $+8$
A が手 Q，B が手 P $\rightarrow$ A が -2，B が $+2$
A が手 Q，B が手 Q $\rightarrow$ A が $+5$，B が -5

二人零和ゲーム

各プレーヤーは確率的に手を選ぶ

$$\begin{aligned} &\text{A が手 P を選ぶ確率 } x \quad \rightarrow \quad \text{A が手 Q を選ぶ確率 } 1-x \\ &\text{B が手 P を選ぶ確率 } y \quad \rightarrow \quad \text{B が手 Q を選ぶ確率 } 1-y \end{aligned}$$

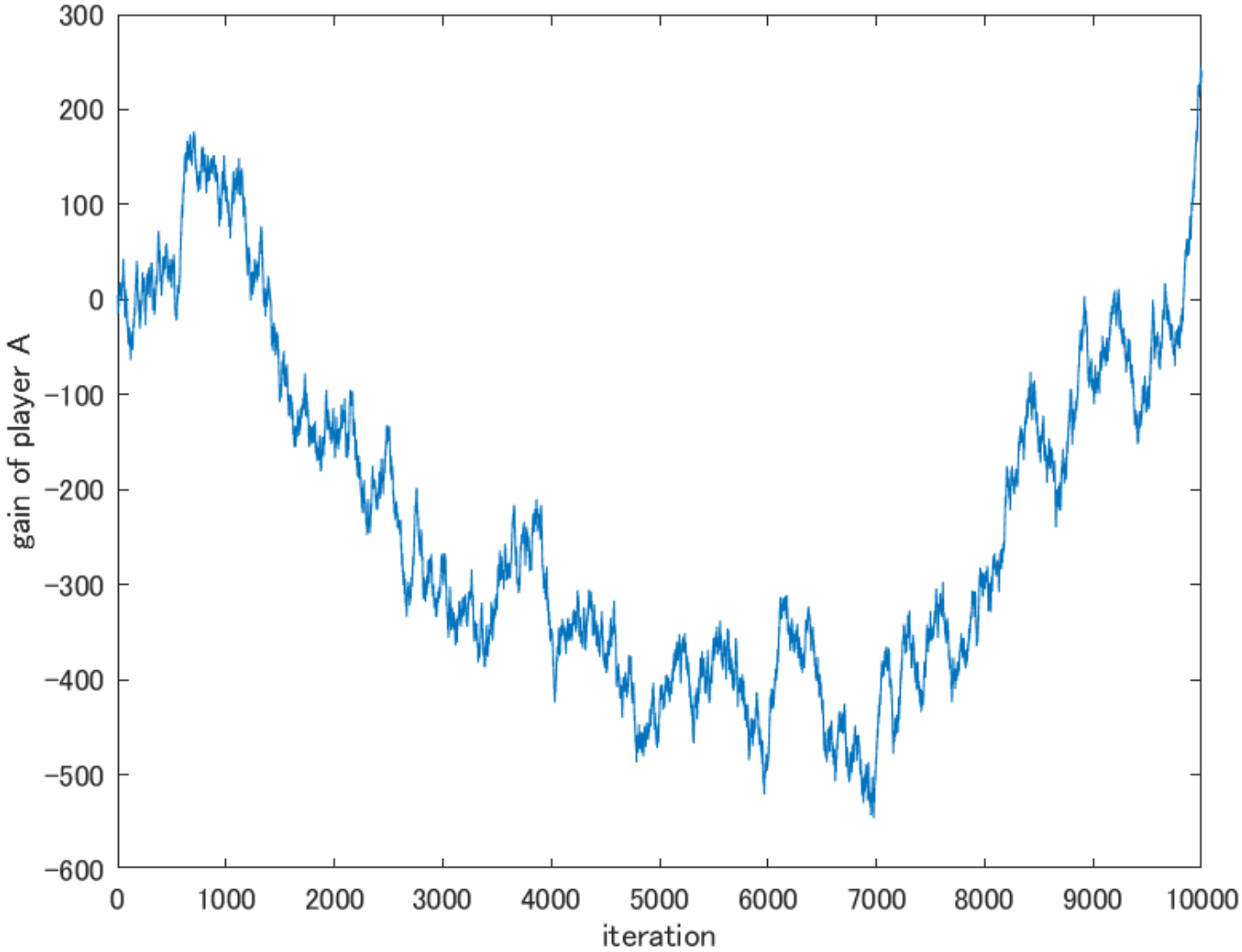
プレーヤー A の利得を求める.

zero_sum_game_simulation.m

```
g = [  5, -8;  -2,  5 ];
x = 0.35; y = 0.50;

gainA = 0; result = [];
for iteration=1:10000
    if rand < x A = 1; else A = 2; end
    if rand < y B = 1; else B = 2; end
    gainA = gainA + g(A,B);
    result = [ result; iteration, gainA ];
end

plot(result(:,1), result(:,2));
```

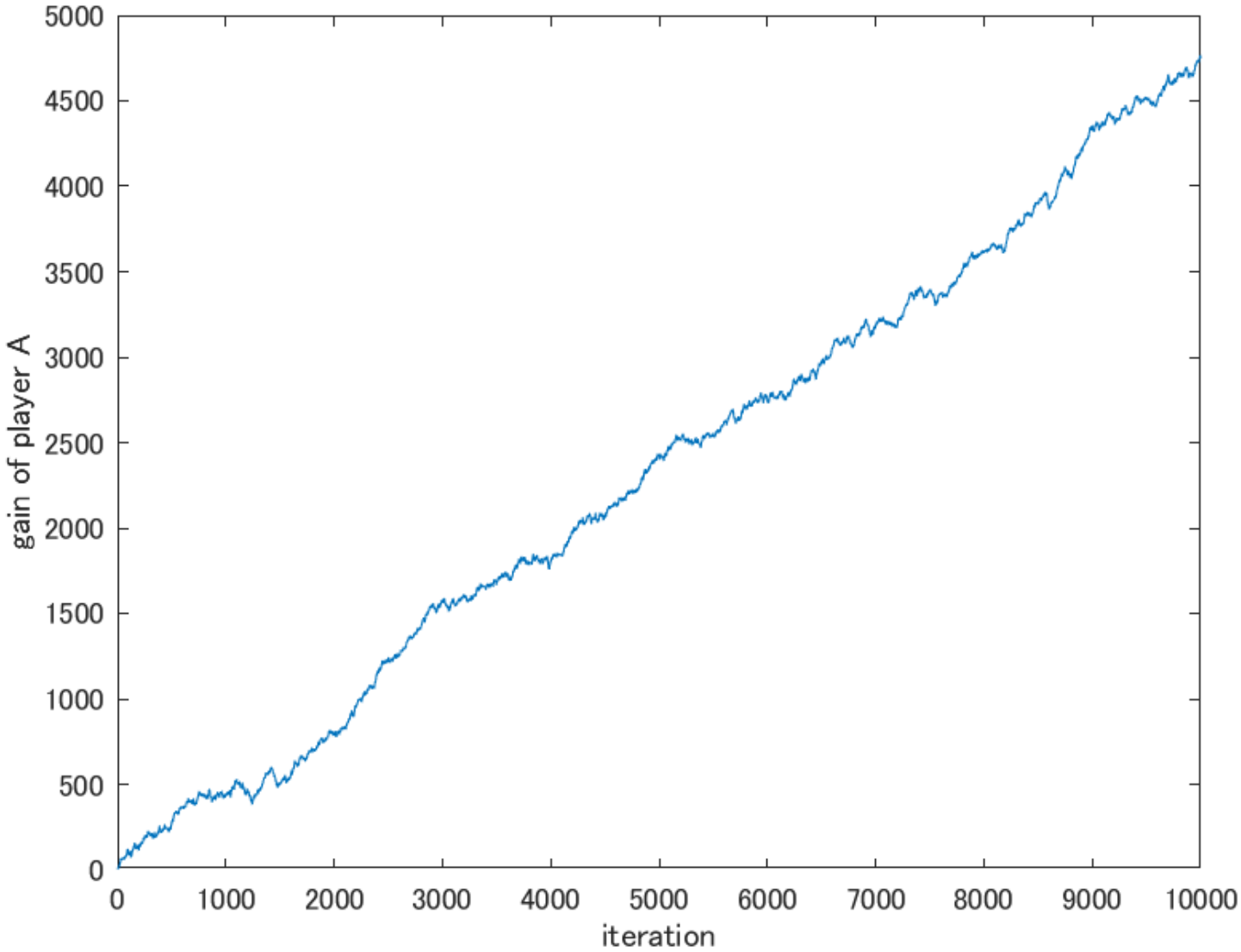
二人零和ゲーム

$$x = 0.50, \quad y = 0.50$$



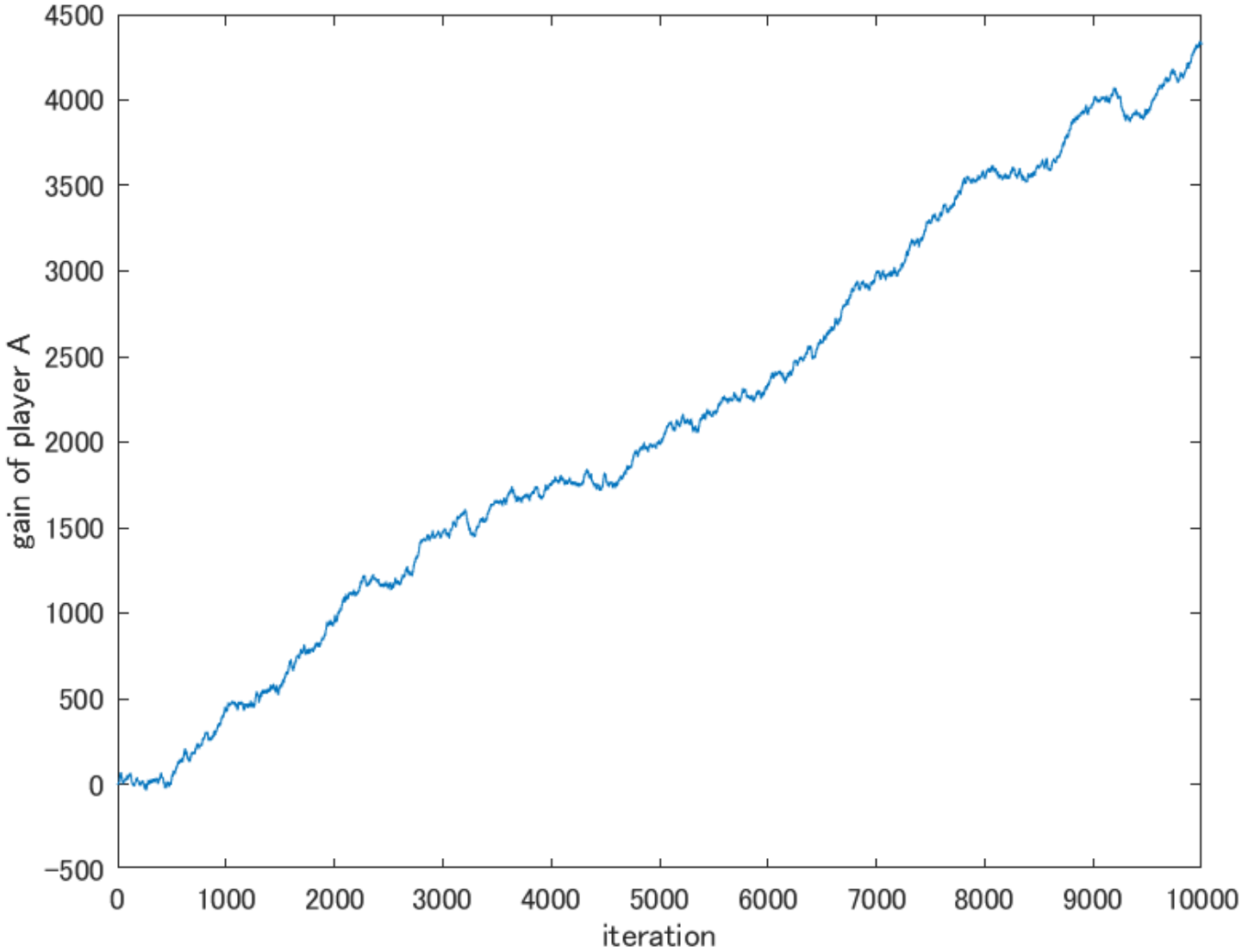
二人零和ゲーム

$$x = 0.35, \quad y = 0.50$$

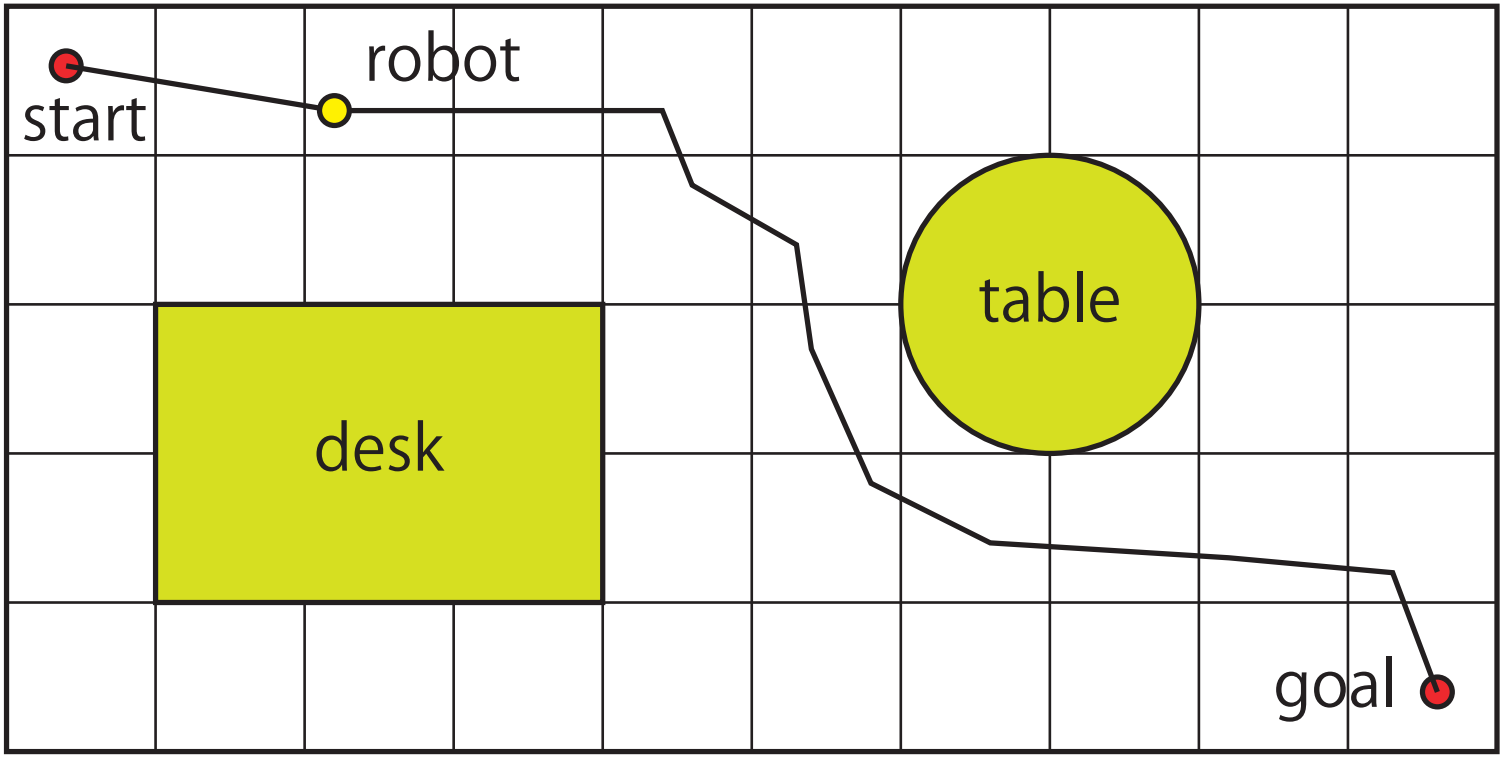


二人零和ゲーム

$$x = 0.35, \quad y = 0.65$$

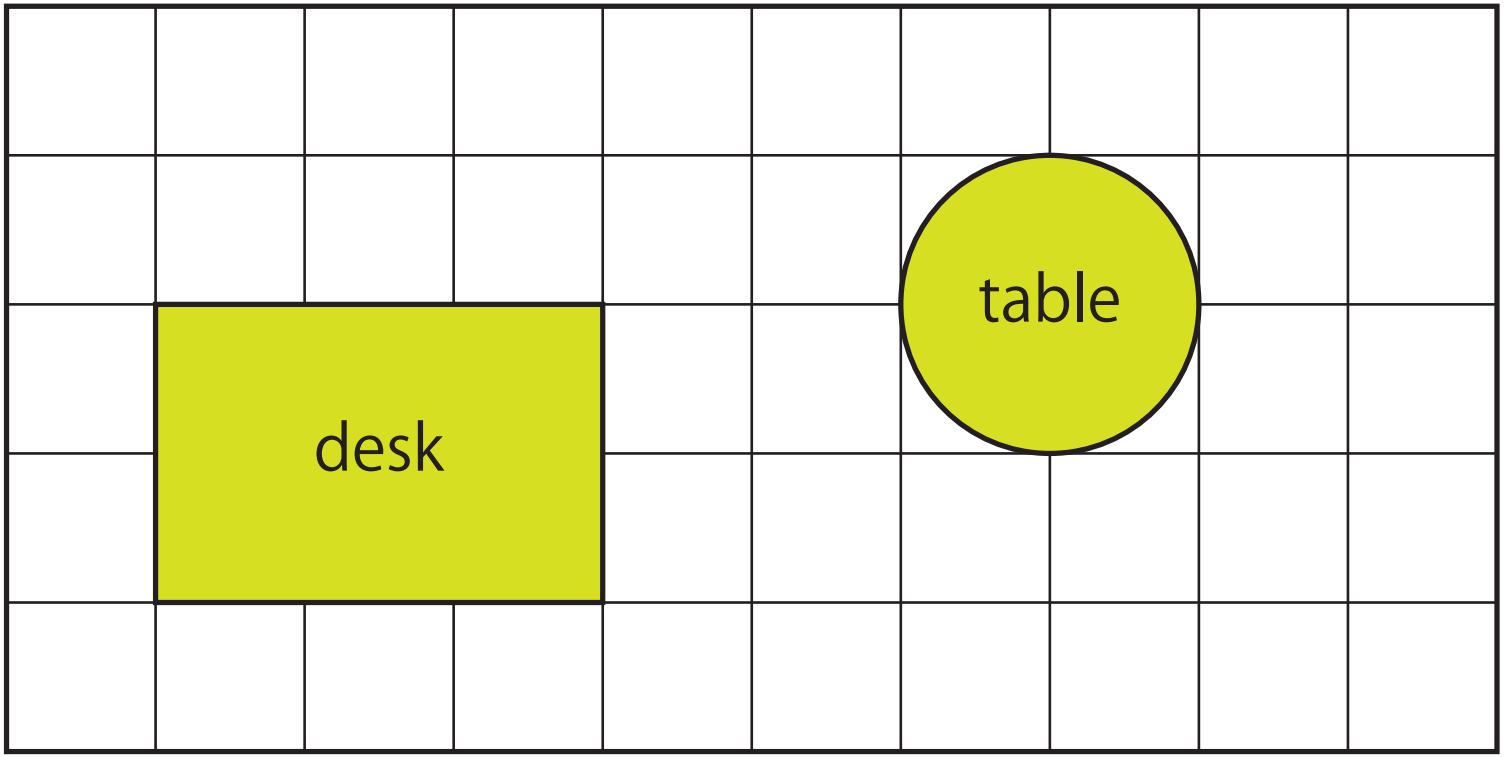


移動ロボットの経路計画



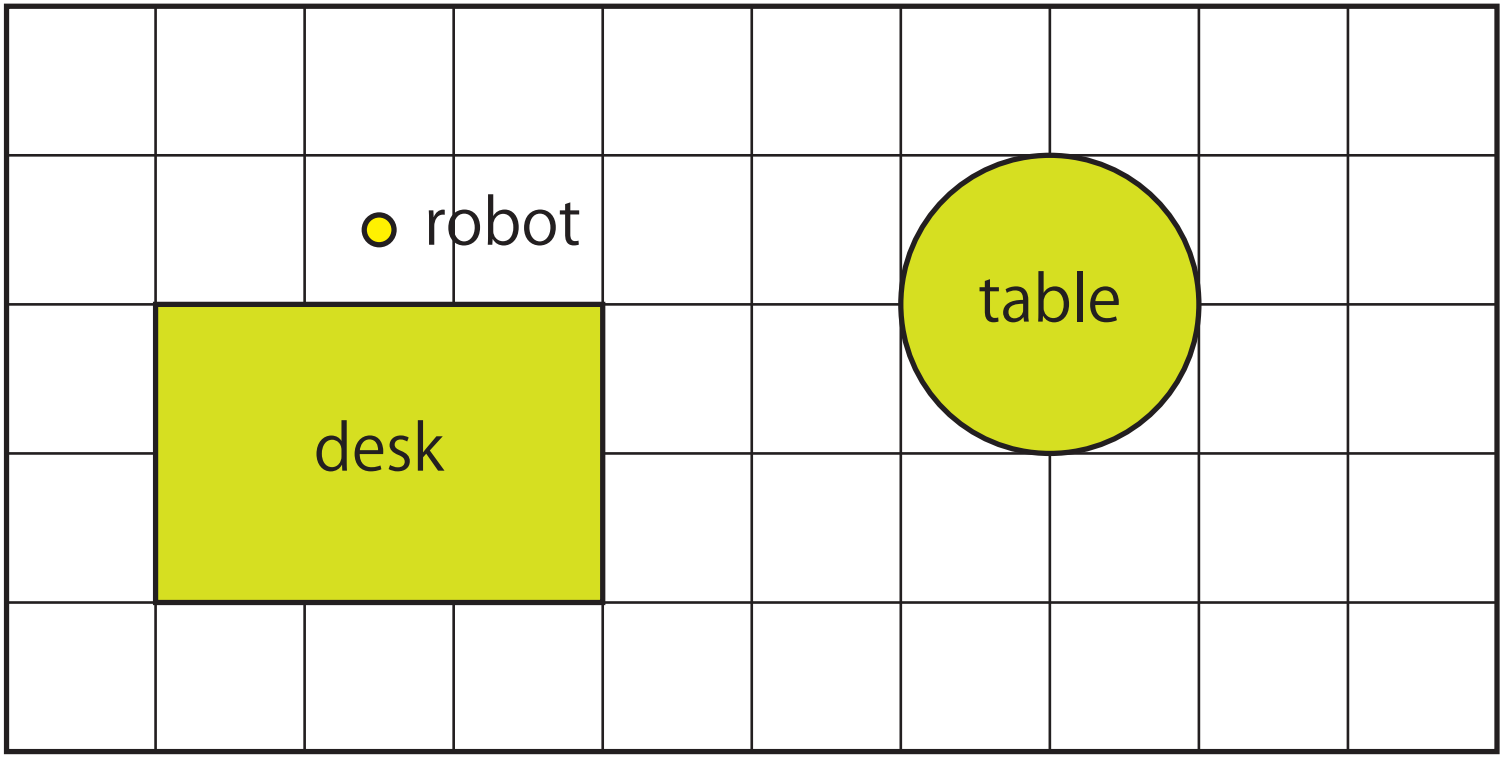
障害物（机，テーブル）と干渉や接触をすることなく
スタートからゴールに至る経路を見つける

移動ロボットの経路計画



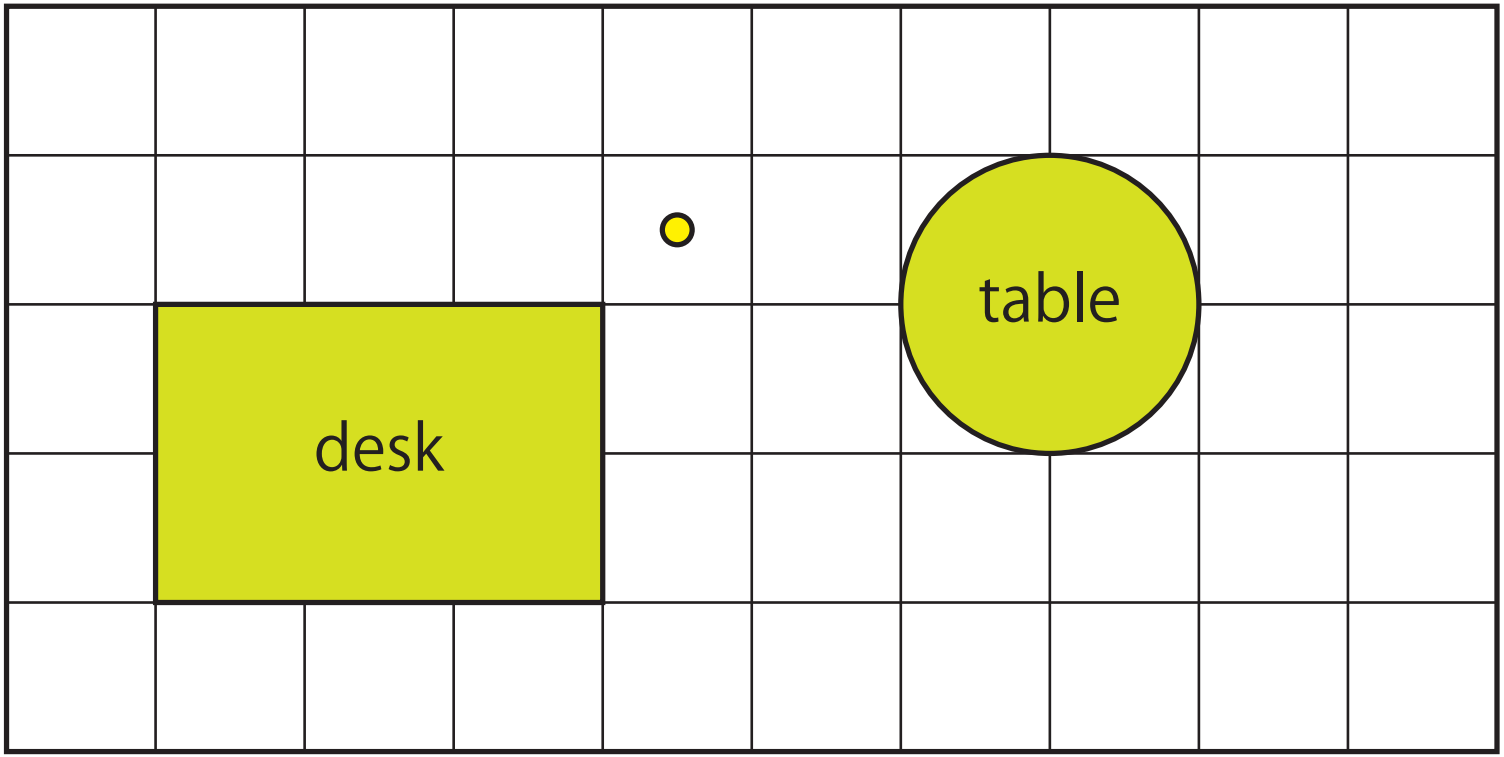
部屋の大きさ：　横 10m　縦 5m
机　　（長方形　横 3m　縦 2m）
テーブル　（円形　半径 1m）

移動ロボットの経路計画



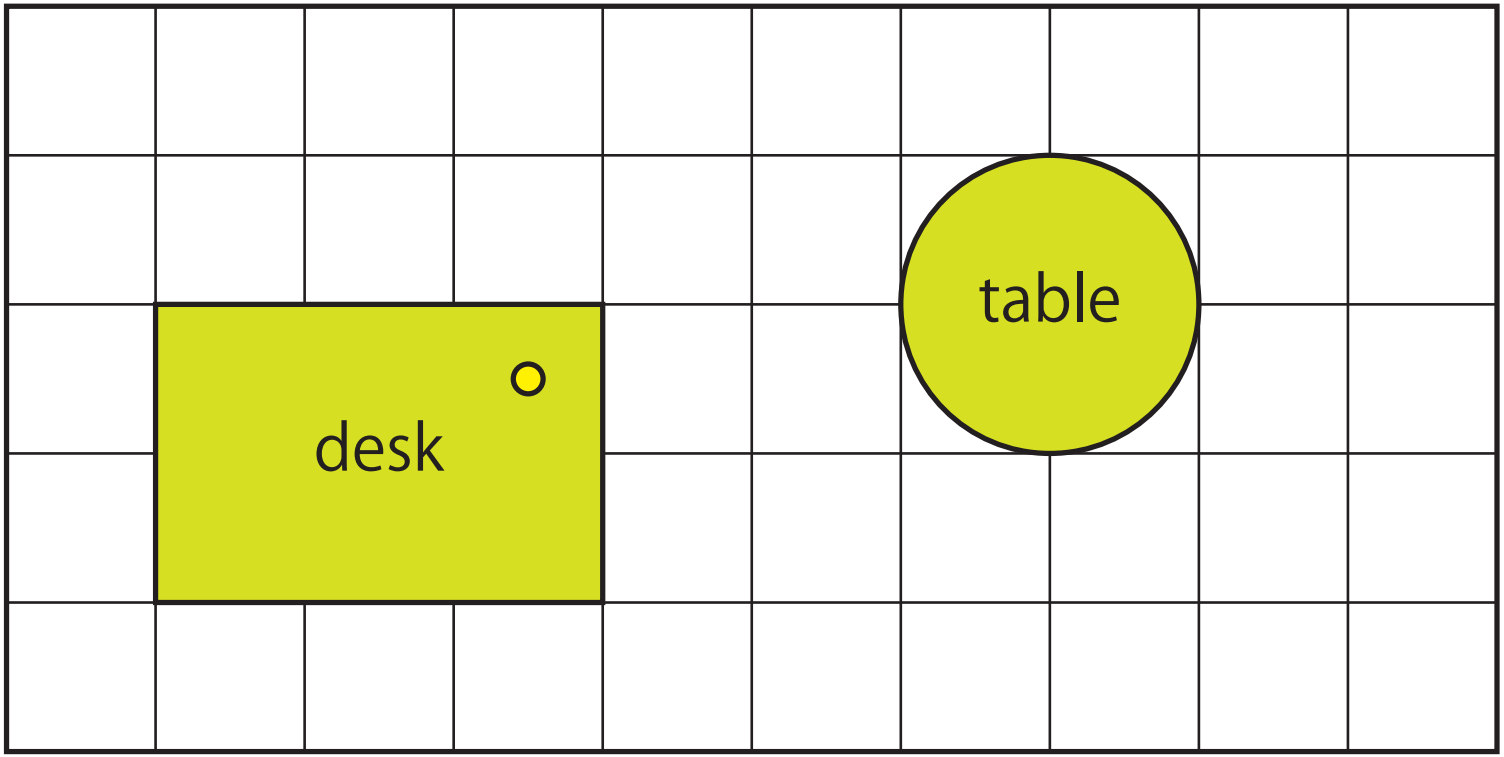
移動ロボット：　大きさを無視する　→　点とみなす
部屋の左下角に原点を設定
→　移動ロボットの位置　座標 (x, y)

移動ロボットの経路計画



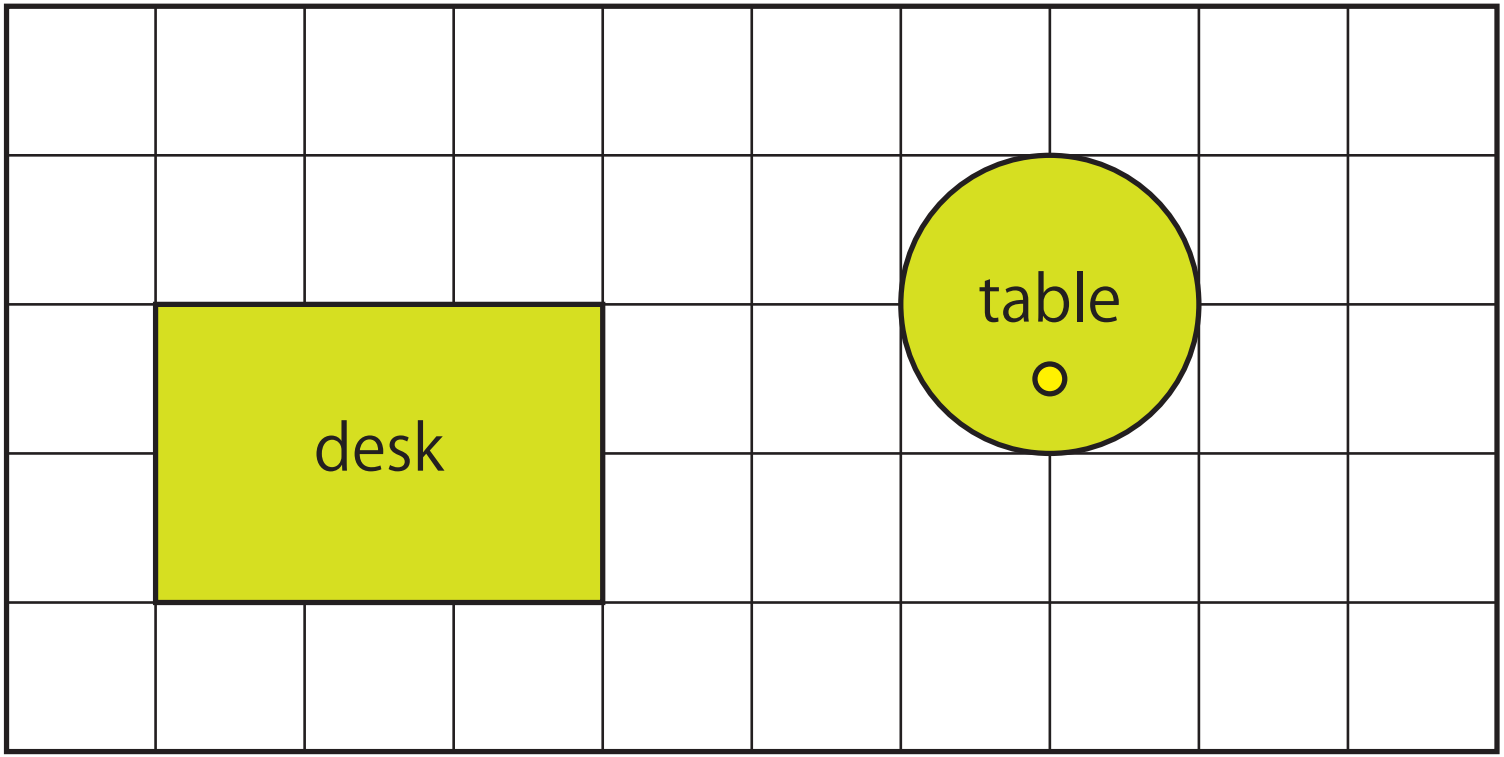
ロボットの位置 (4.50, 3.50)
自由 (free)

移動ロボットの経路計画



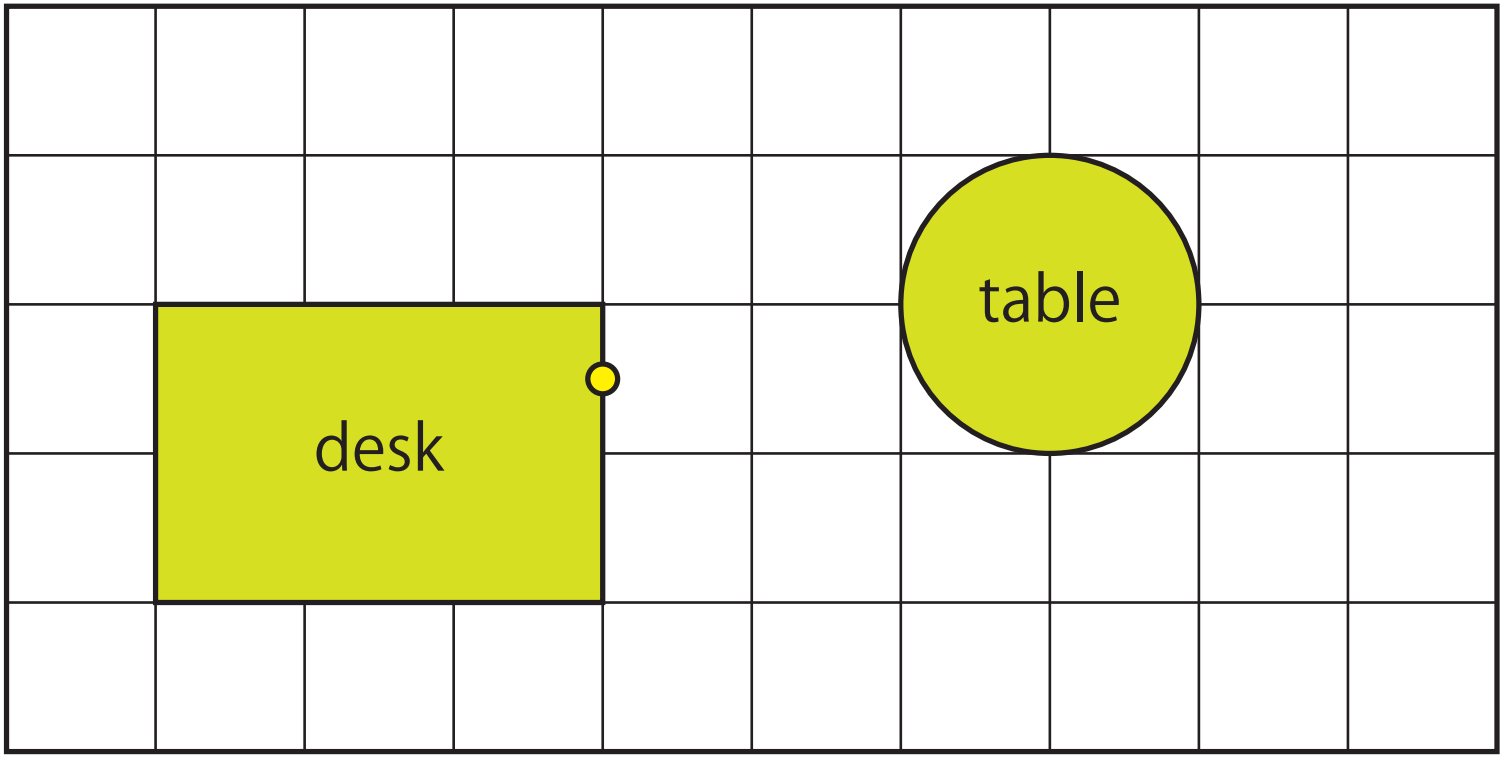
ロボットの位置 (3.50, 2.50)
干渉 (interfered)
→ 物理的に起こらない

移動ロボットの経路計画



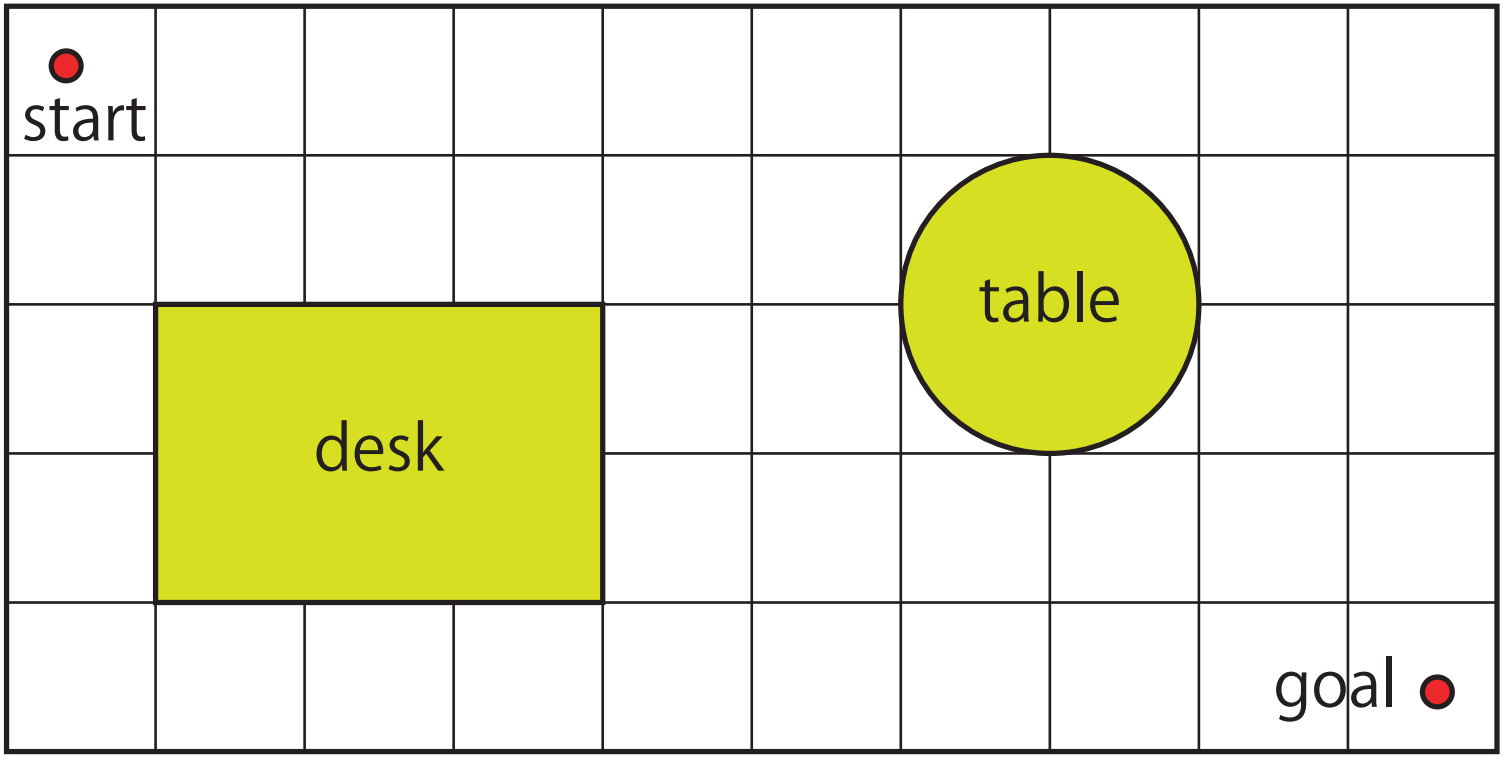
ロボットの位置 (7.00, 2.50)
干渉 (interfered)
→ 物理的に起こらない

移動ロボットの経路計画



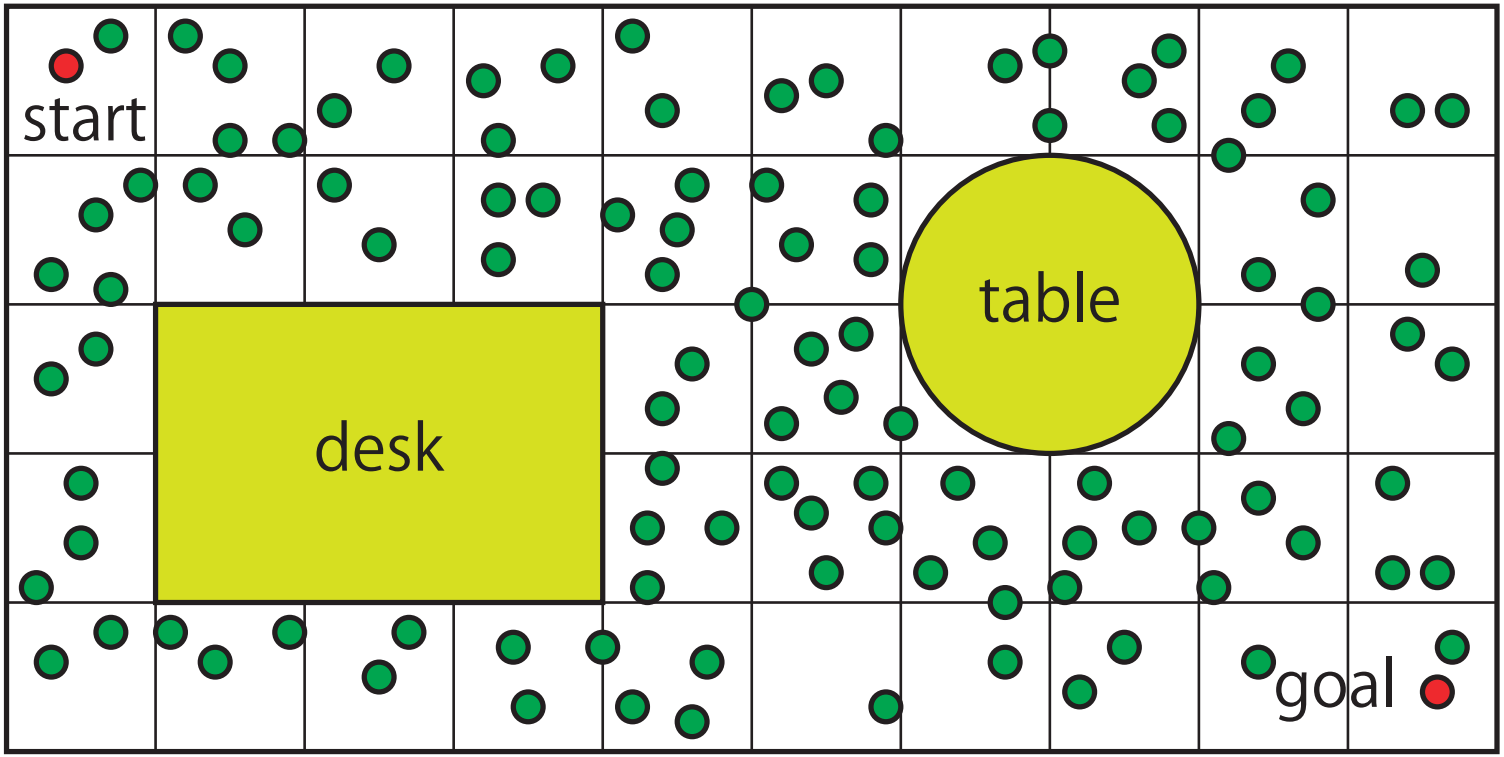
ロボットの位置 (4.00, 2.50)
接触 (contact)
→ 起こりうるが望ましくない

PRM (Probabilistic Roadmaps)



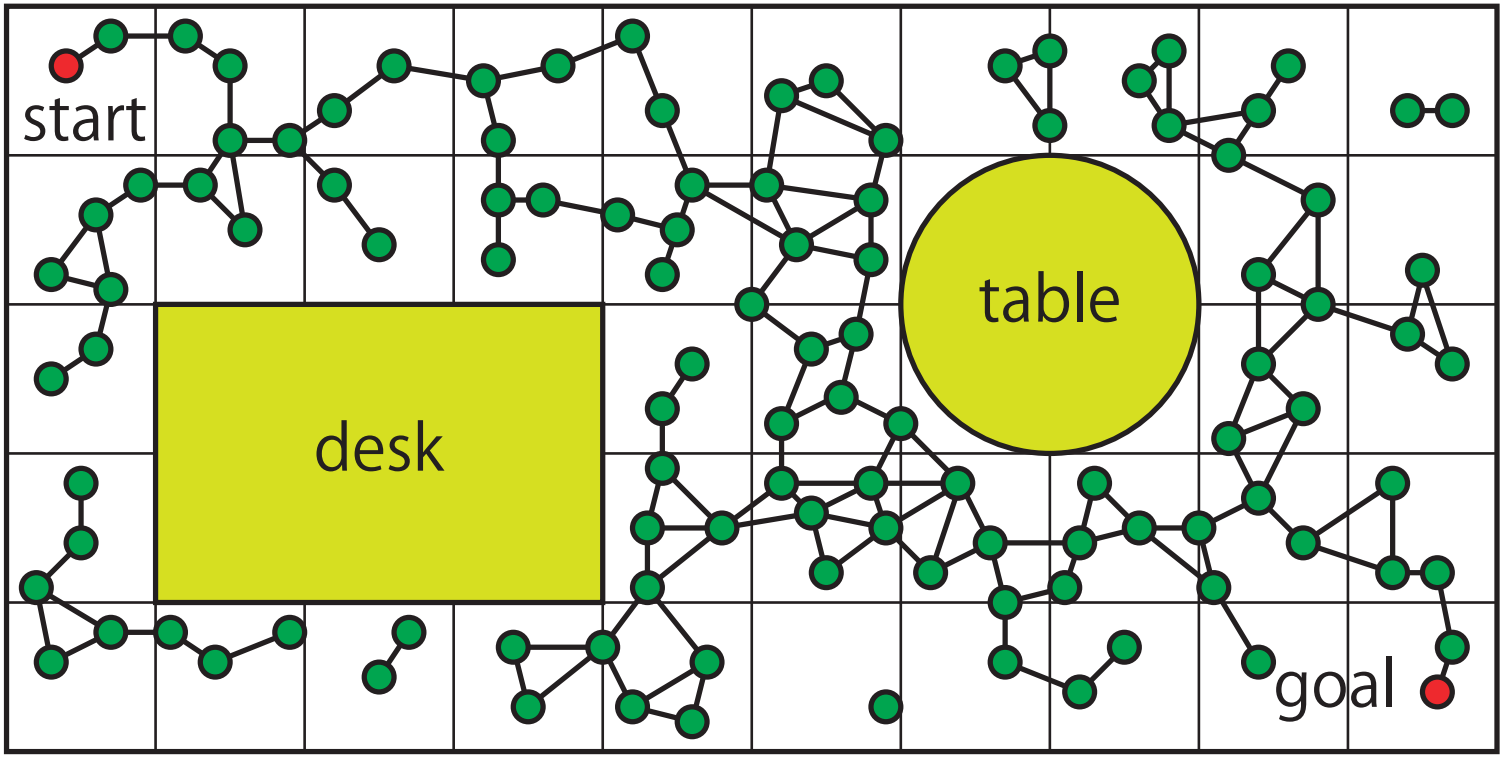
スタートとゴールの設定

PRM (Probabilistic Roadmaps)



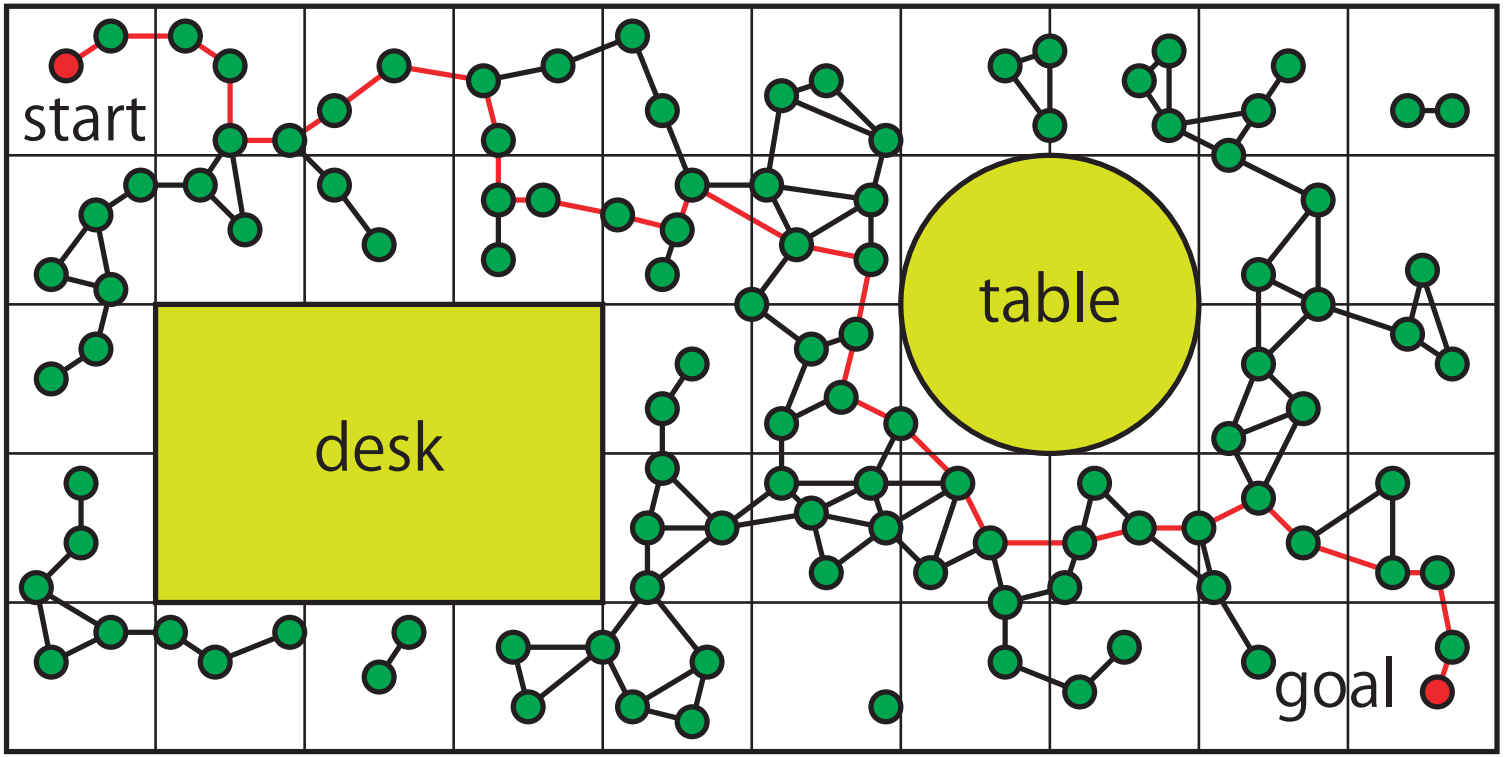
自由な点をランダムに生成

PRM (Probabilistic Roadmaps)



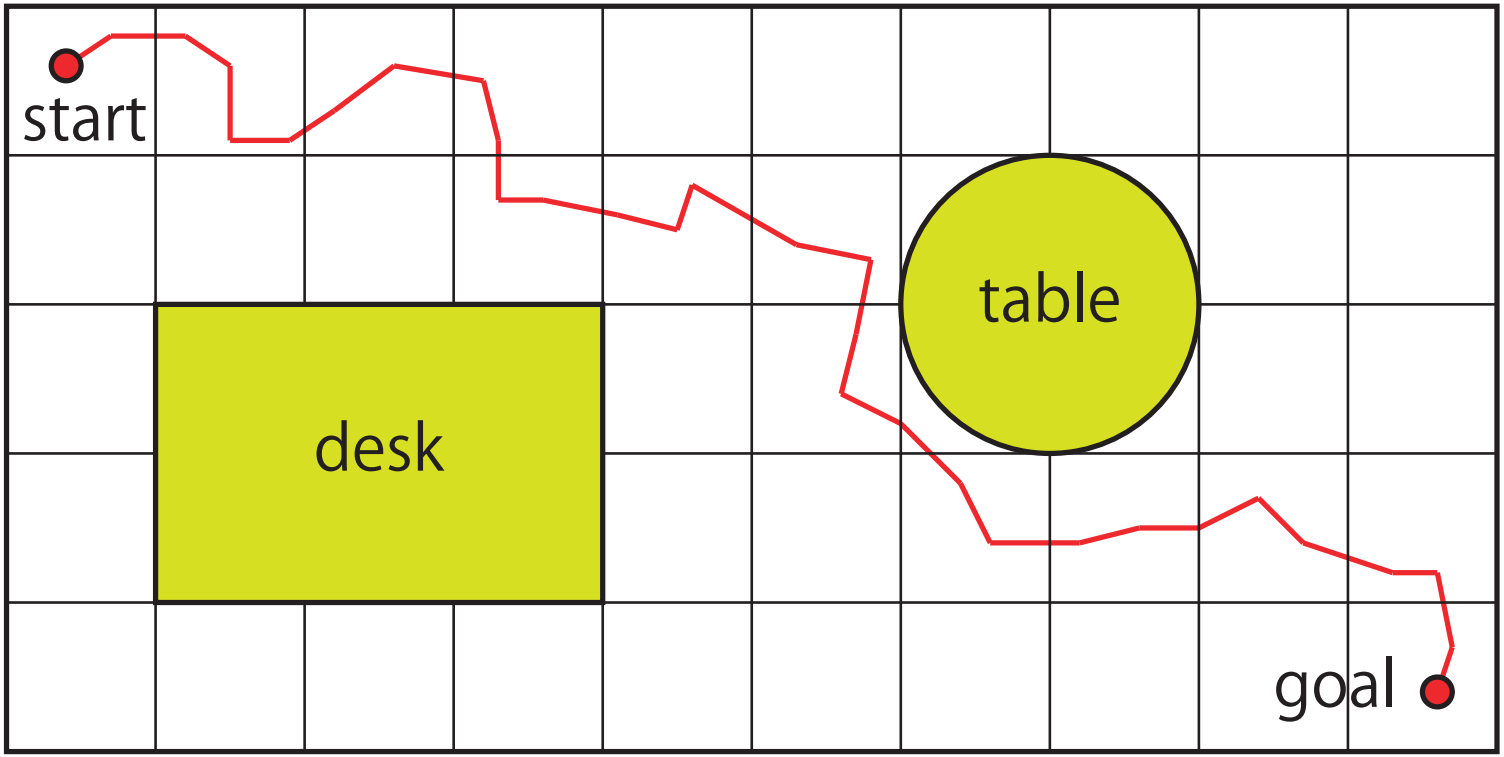
自由な短い線分をエッジで接続

PRM (Probabilistic Roadmaps)



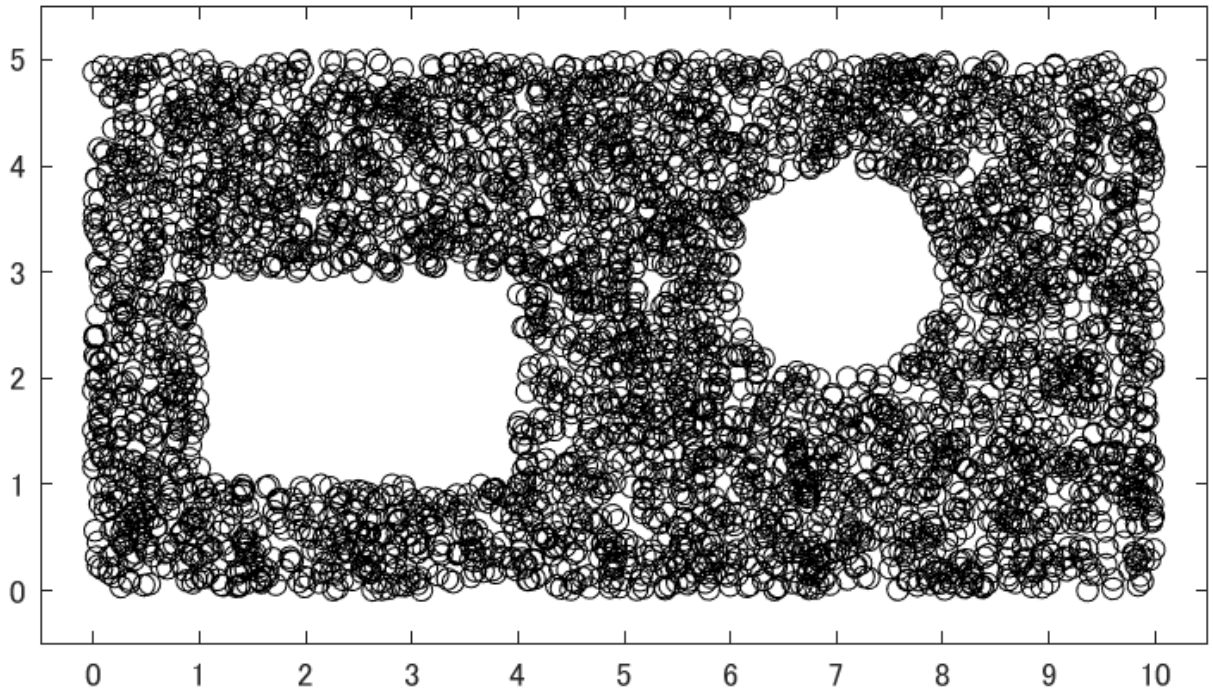
スタートからゴールへ至る経路

PRM (Probabilistic Roadmaps)

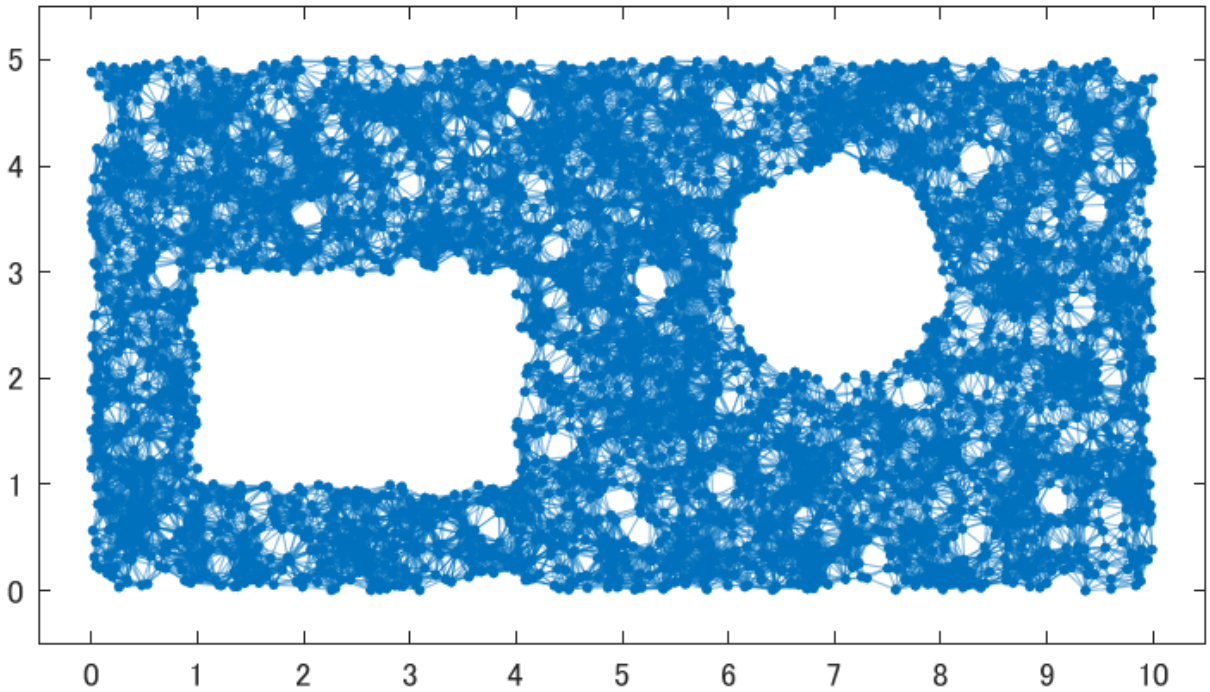


結果

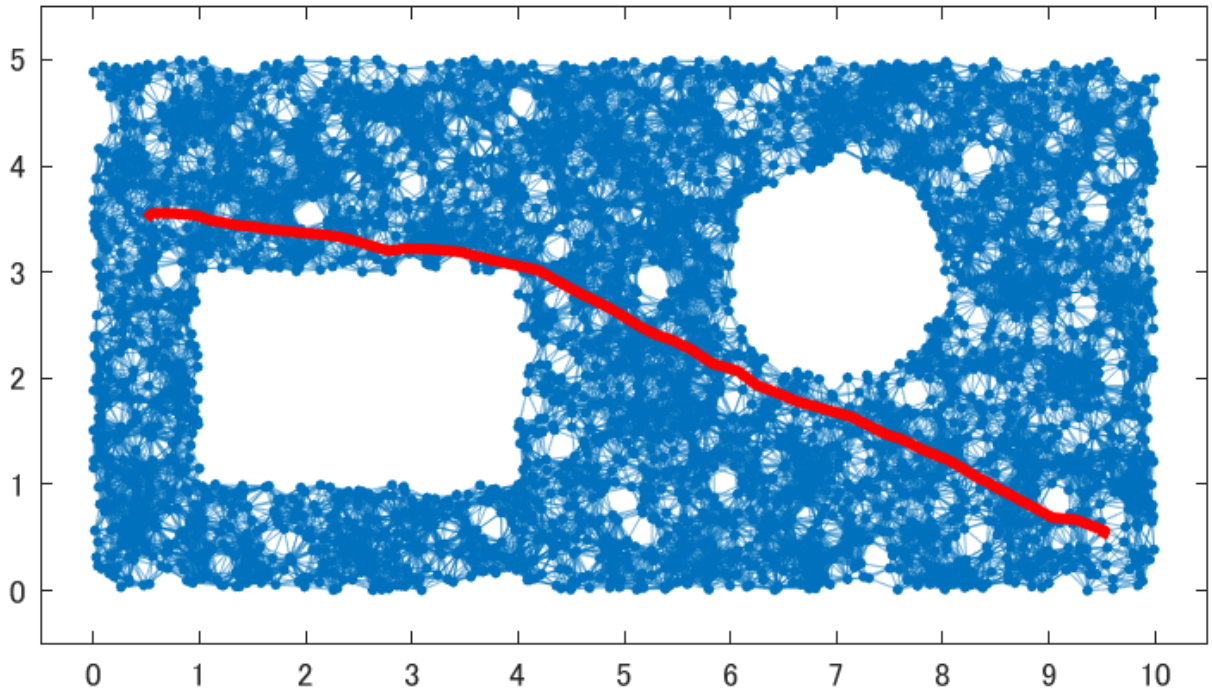
実行例（グラフを作成する）



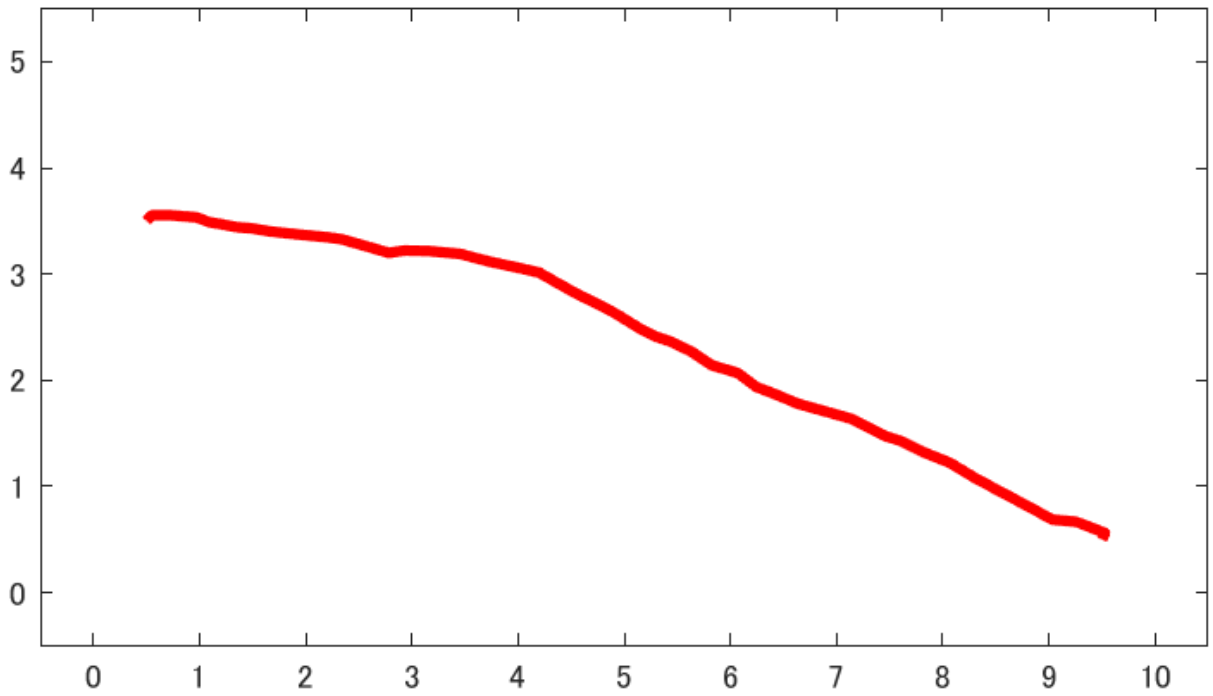
実行例（グラフを作成する）



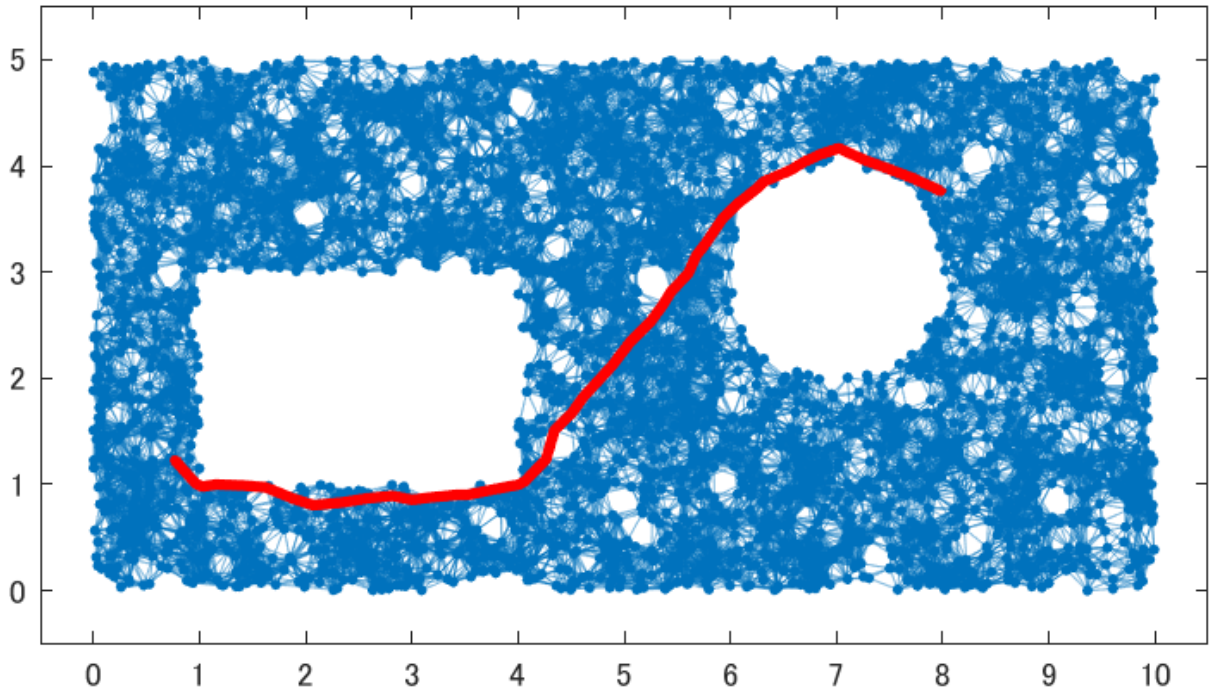
実行例（最短経路を見つける）



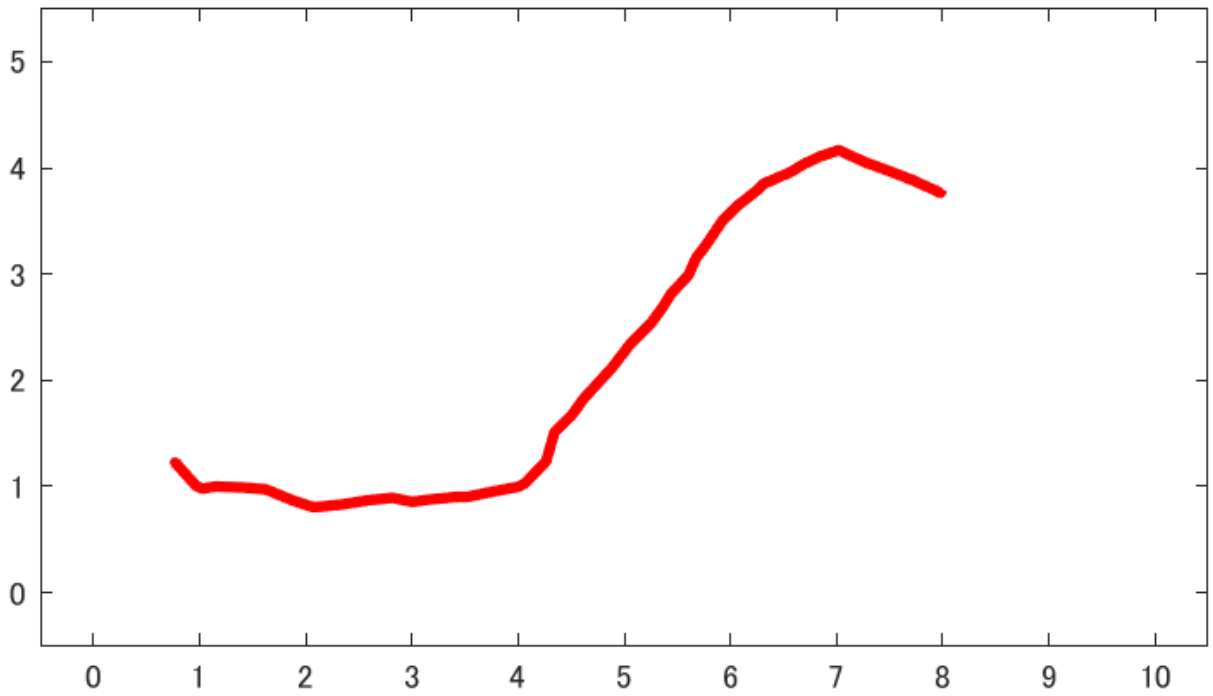
実行例（最短経路を見つける）



実行例（最短経路を見つける）



実行例（最短経路を見つける）



まとめ

乱数

- 一様乱数 $U(0,1)$
- 一様乱数 $U(a,b)$
- 正規乱数 $N(0,1)$
- 正規乱数 $N(\mu,\sigma)$

モンテカルロ法

- 定積分の近似計算
- 多重定積分の近似計算
- 二人零和ゲームのシミュレーション
- 移動ロボットの経路計画

レポート (MATLAB Grader)

MATLAB grader 「確率的アルゴリズム」
締切：2024 年 7 月 1 日（月曜）00:10 AM 6 回提出可能

「関数」を書いたのちに,「関数の実行」をクリックすると，ヒストグラムやプロットが表示される.
ヒストグラムやプロットを見て，解答を確認した後に,「提出」をクリックする.
「評価」で検定を行っているため，正しい解答を誤りと判定することがある．そのときは，再度「提出」をクリックする.