知能科学：チューリングマシン

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

講義の流れ

1. チューリング
2. チューリングマシン
3. 動作例
   - 加算
   - 数える
   - 最大公約数
4. チャーチの提案
5. 停止問題
6. まとめ

チューリング　Alan Turing　(1912 − 1954)

- イギリスの数学者
- チューリングマシン (Turing machine) の考案者
- チューリングテスト (Turing test) の考案者
- 暗号解読への貢献（ボンベによるエニグマの解読．ボンベはレイェフスキ（ポーランド）の発明）
- チューリング賞 (計算機科学分野のノーベル賞)
- 映画「イミテーション・ゲーム」
- 2019 年 英国 50 ポンド札の肖像に選ばれる（札は 2021 年より流通）

チューリング　Alan Turing　(1912 – 1954)

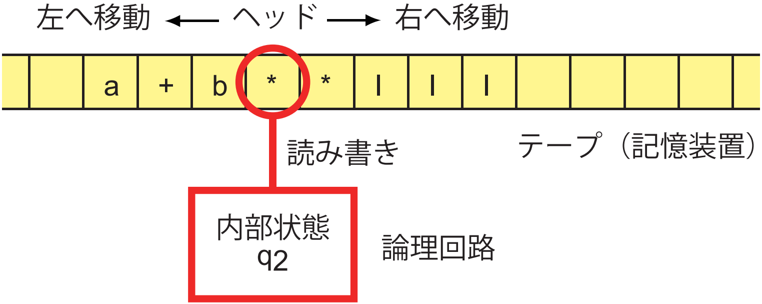
Alan Turing to feature on new £50 banknote

Mathematician who cracked Enigma code was persecuted for his homosexuality in 1950s

The father of modern computing: Alan Turing's legacy

チューリングマシン

コンピュータのモデルとなる仮想的な機械
(提唱 1936 年　コンピュータの実現より先)



チューリングマシン

アルファベット	有限個 (たとえば a, b, c, 0, 1) 空白を Λ で表す
ヘッドの移動	L(left, 左), R(right, 右), F(fix, 静止)
内部状態	有限個 (たとえば q_0, q_1, q_2, q_3) 停止を!で表す

入力アルファベット	テープから読み込む
出力アルファベット	テープに書き込む

入力アルファベット
現在の状態

$\Longrightarrow$

出力アルファベット
ヘッドの移動
次の状態

機能表

機能表

入力アルファベット

現在の状態

	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	ILq_1	IRq_2
Λ	ΛRq_0	ΛRq_0	IFq_1
*	Λ!	*Lq_1	*Rq_2

*Lq_1

出力アルファベット　ヘッドの移動　次の状態

機能表(省略形)

現在の状態

入力アルファベット

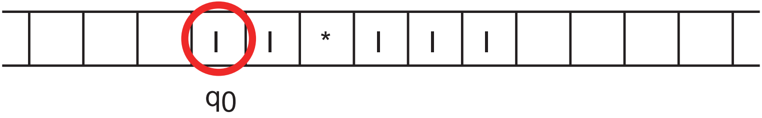
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

$*\mathrm{L}q_1$

出力アルファベット　ヘッドの移動　次の状態

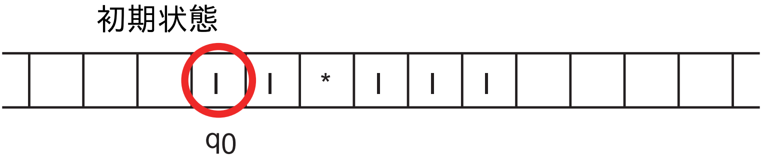
動作例

初期状態



	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

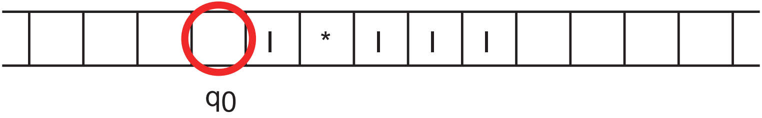
動作例



	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例

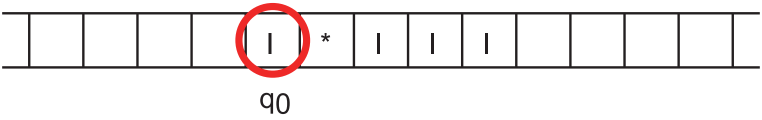
テープの文字を書き換える (Λ : 空白)



	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例

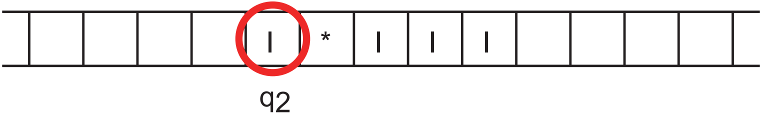
ヘッドの移動 (R)



	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

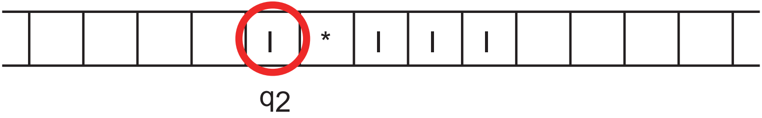
動作例

状態遷移



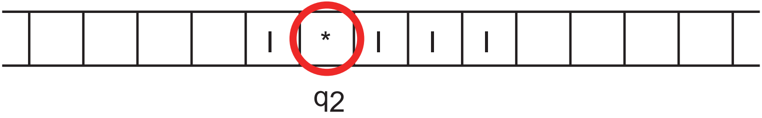
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



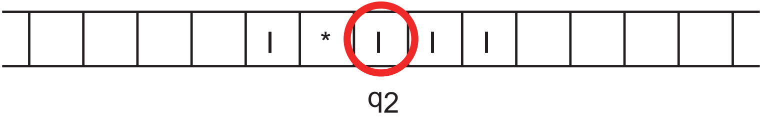
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	$\mathrm{I}\ q_1$
*	Λ!	L	R

動作例



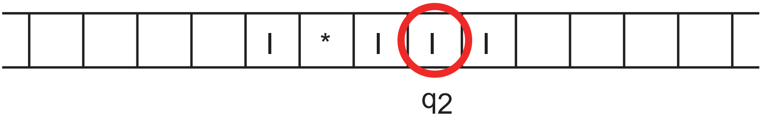
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



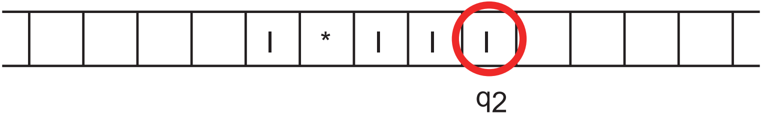
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



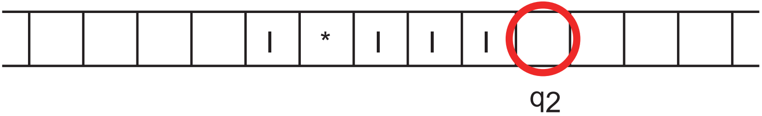
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



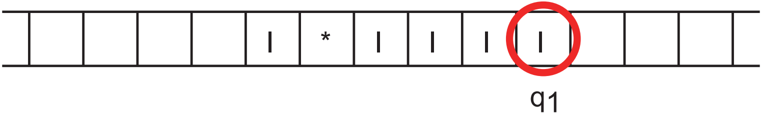
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



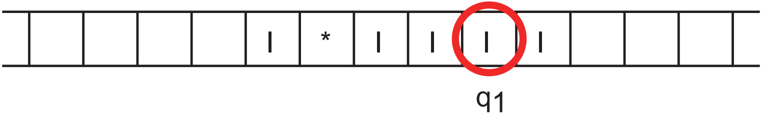
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



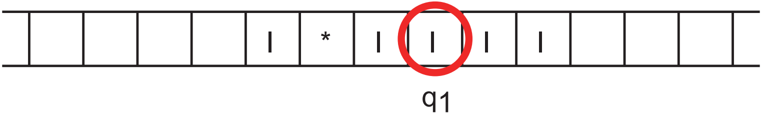
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



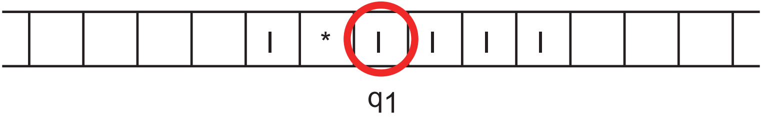
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	I q_1
$*$	Λ!	L	R

動作例



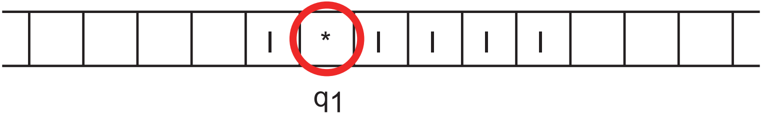
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



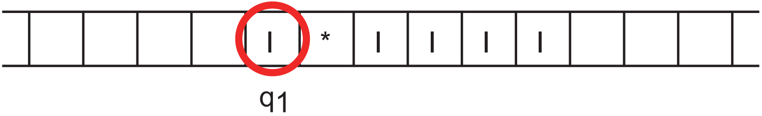
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



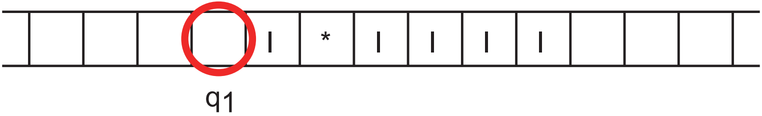
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



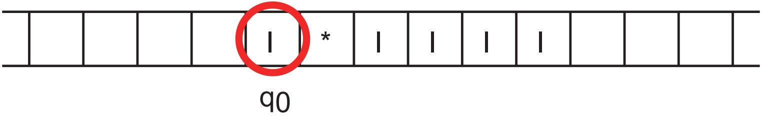
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



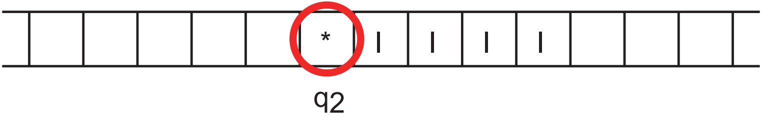
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



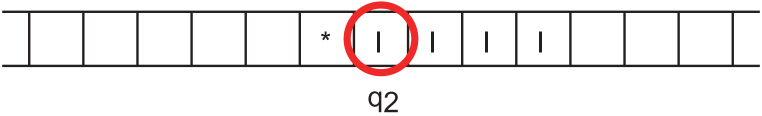
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



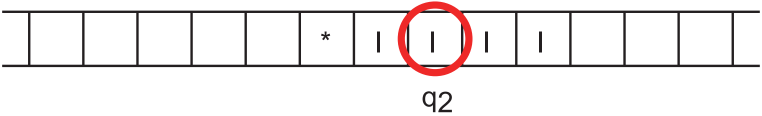
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



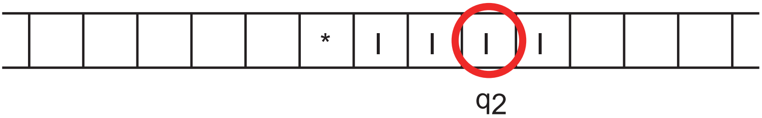
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



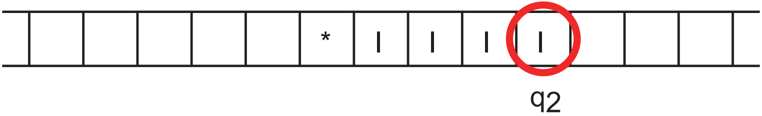
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



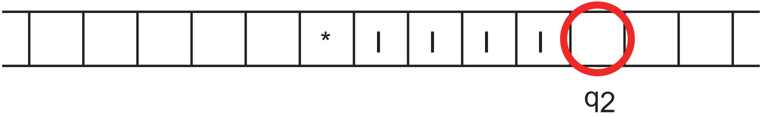
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



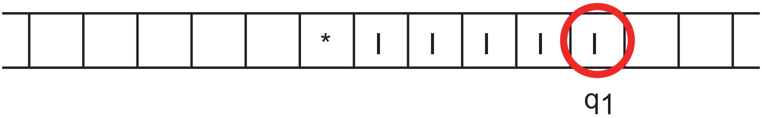
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



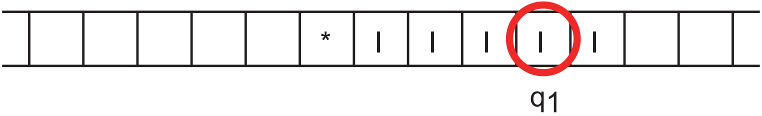
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



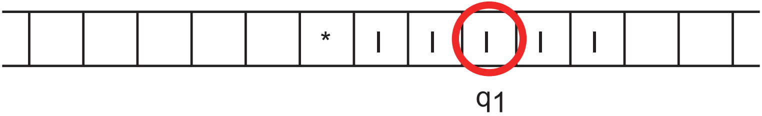
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



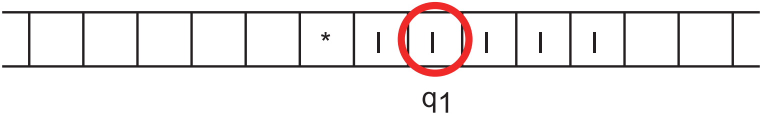
	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



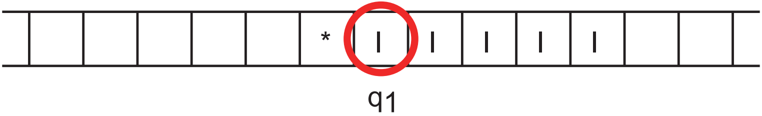
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



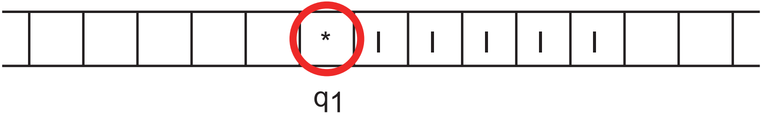
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	$\Lambda !$	L	R

動作例



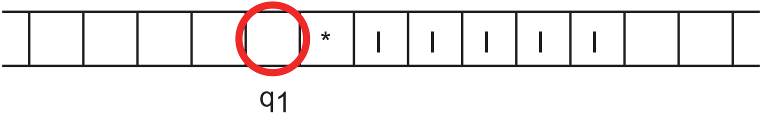
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



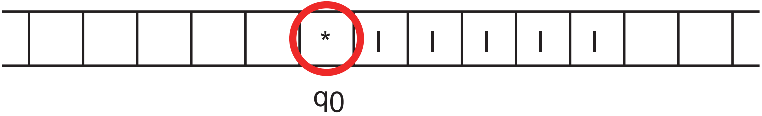
	q_0	q_1	q_2
I	$\Lambda \mathrm{R} q_2$	L	R
Λ	R	$\mathrm{R} q_0$	$\mathrm{I}\ q_1$
*	Λ!	L	R

動作例



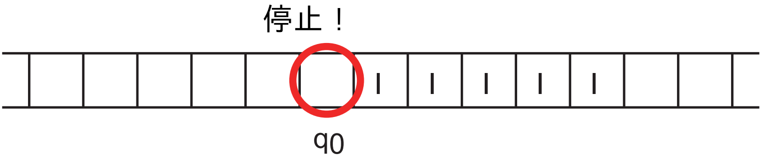
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
I	ΛRq_2	L	R
Λ	R	Rq_0	I q_1
*	Λ!	L	R

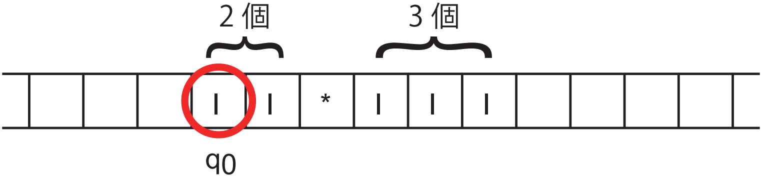
動作例



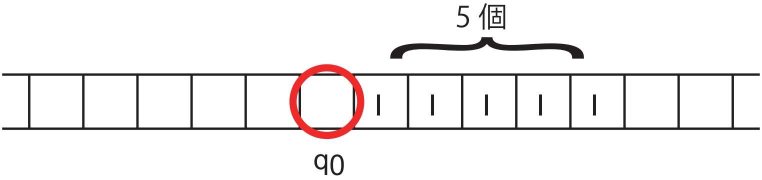
	q_0	q_1	q_2
I	Λ R q_2	L	R
Λ	R	R q_0	I q_1
*	Λ!	L	R

動作例

初期状態



停止状態



加算を計算する機能表

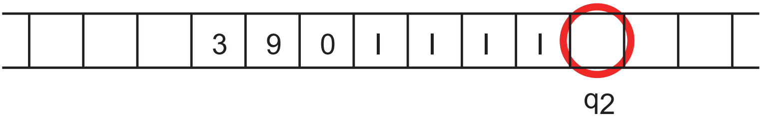
個数を数えて十進数で表す

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
2	3 q_2	!	R
3	4 q_2	!	R
4	5 q_2	!	R
5	6 q_2	!	R

	q_0	q_1	q_2
6	7 q_2	!	R
7	8 q_2	!	R
8	9 q_2	!	R
9	0L	!	R
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

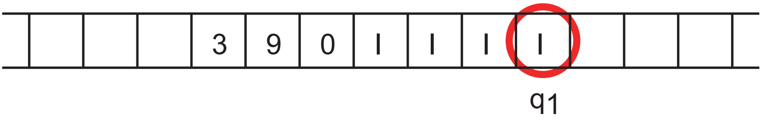
個数を数えて十進数で表す

初期状態



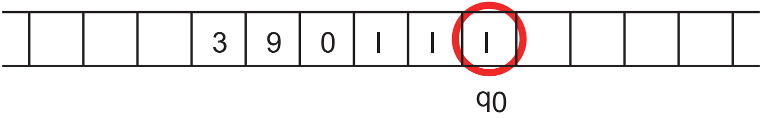
	q_0	q_1	q_2
Λ	$1\ q_2$	!	$\mathrm{L}q_1$

個数を数えて十進数で表す



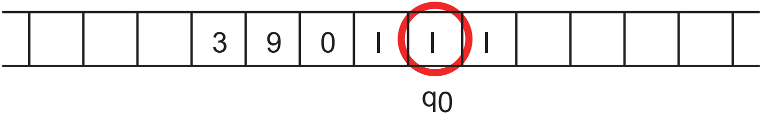
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\Lambda L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



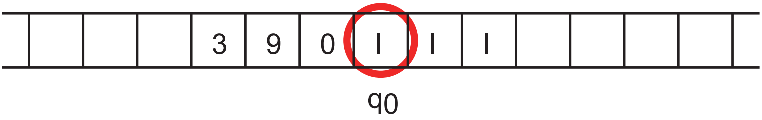
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\Lambda \mathrm{L} q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



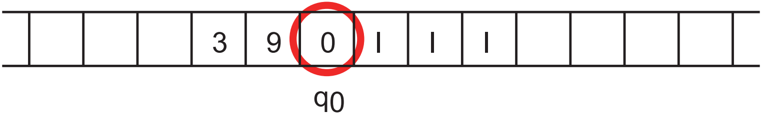
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\Lambda \mathrm{L} q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



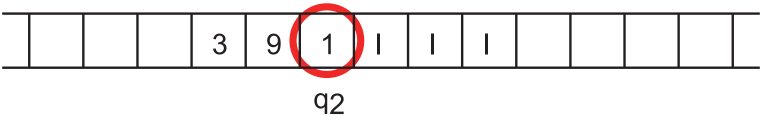
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\Lambda \mathrm{L} q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



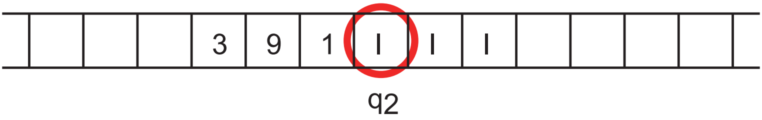
	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R

個数を数えて十進数で表す



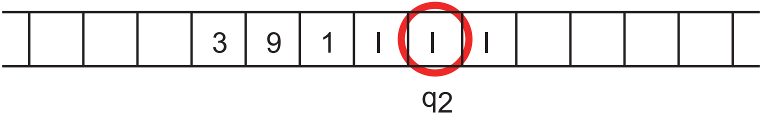
	q_0	q_1	q_2
1	2 q_2	!	R

個数を数えて十進数で表す



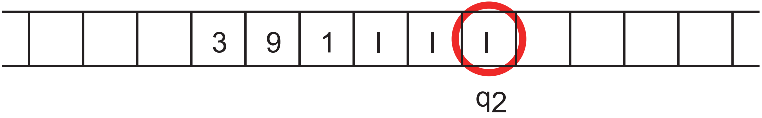
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\Lambda \mathrm{L} q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



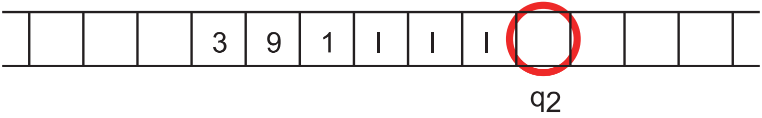
	q_0	q_1	q_2
I	L	ΛLq_0	R

個数を数えて十進数で表す



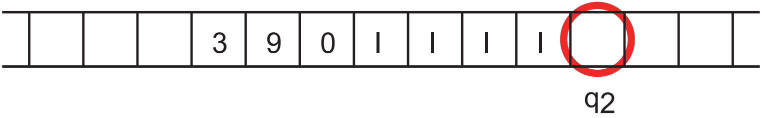
	q_0	q_1	q_2
I	L	ΛLq_0	R

個数を数えて十進数で表す

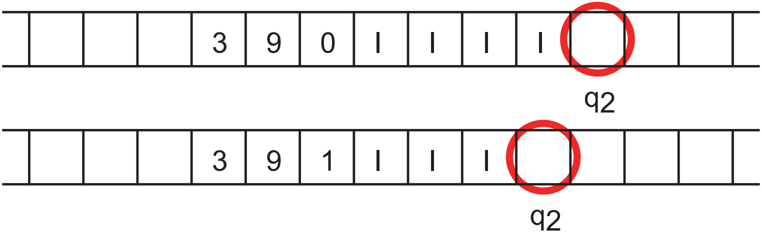


	q_0	q_1	q_2
Λ	1 q_2	!	Lq_1

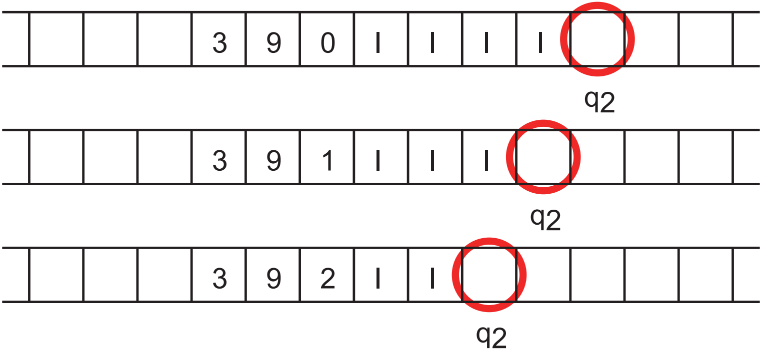
個数を数えて十進数で表す



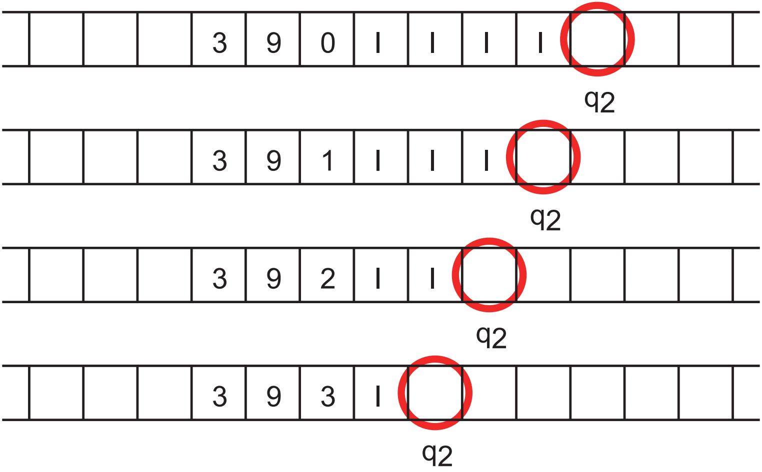
個数を数えて十進数で表す



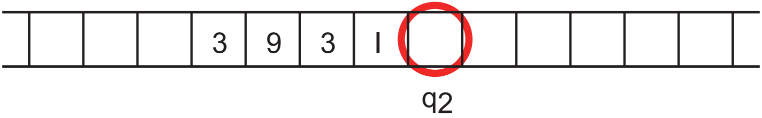
個数を数えて十進数で表す



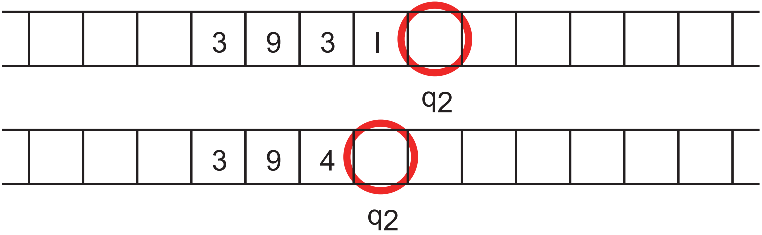
個数を数えて十進数で表す



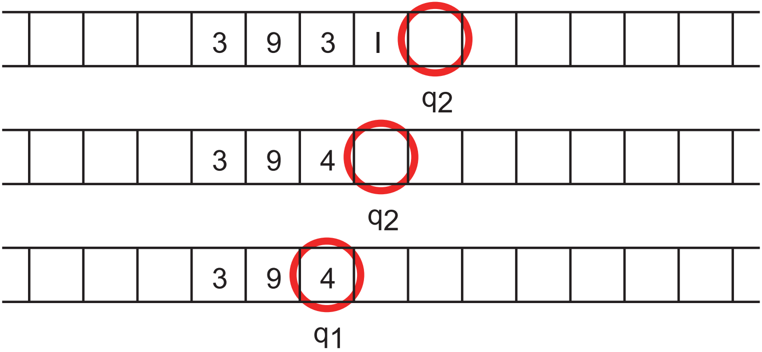
個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す



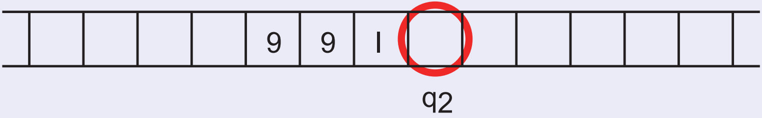
個数を数えて十進数で表す



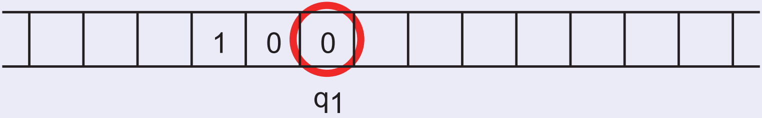
個数を数えて十進数で表す

問題

初期状態



から最終状態



への過程を記せ

ユークリッドの互除法

４と６の最大公約数を求める

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

ユークリッドの互除法

４と６の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$
$$4 - 2 = 2$$

ユークリッドの互除法

4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$2 - 2 = 0$$

ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$
$$4 - 2 = 2$$
$$2 - 2 = 0$$

最大公約数は 2

ユークリッドの互除法の機能表

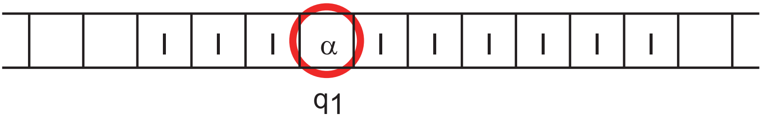
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	!
α	L	R	IL	ΛR
β	L	R	ΛL	IR

計算過程

4 と 6 の差を計算

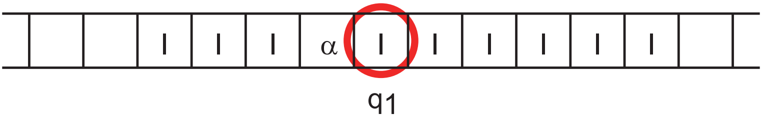
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



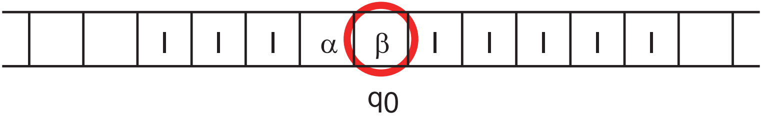
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



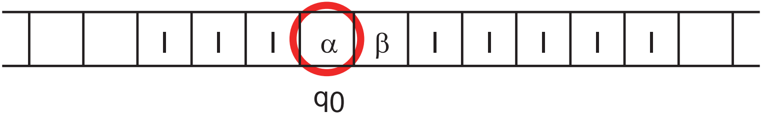
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	$\mathrm{R}q_0$	$\mathrm{L}q_0$

計算過程



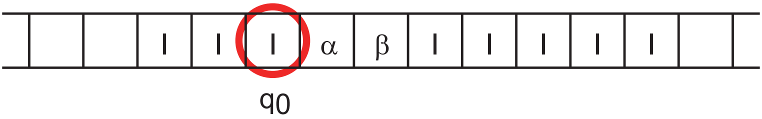
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



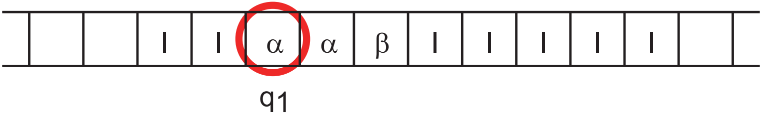
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



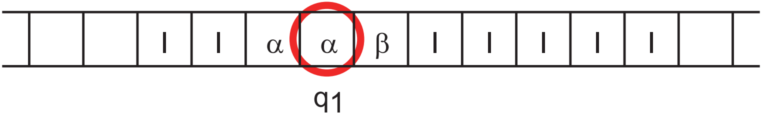
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



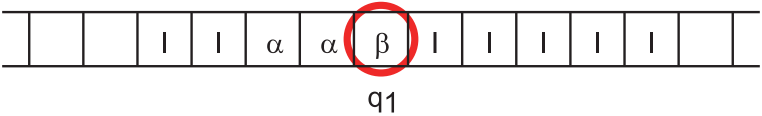
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



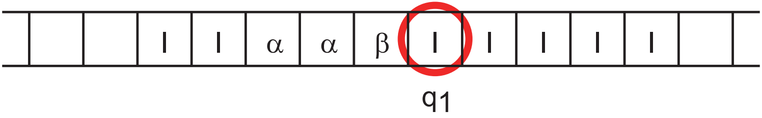
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



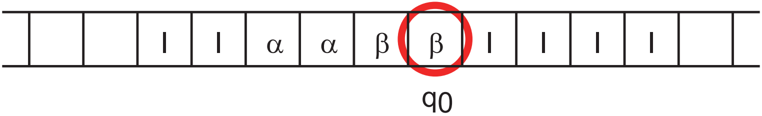
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



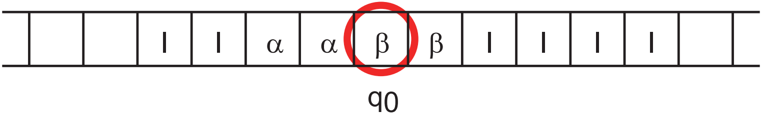
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	$\mathrm{R}q_0$	$\mathrm{L}q_0$

計算過程



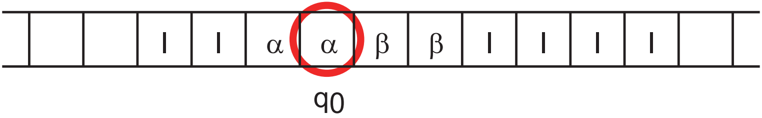
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



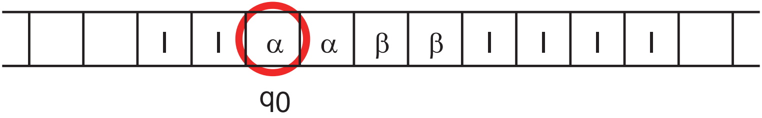
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



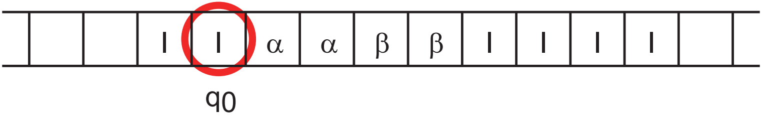
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



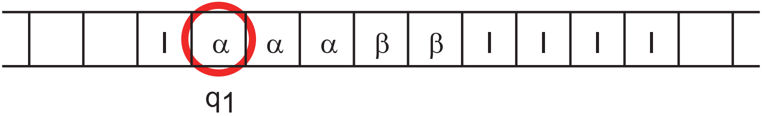
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



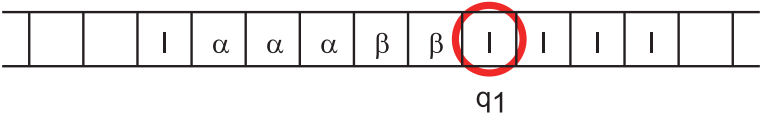
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



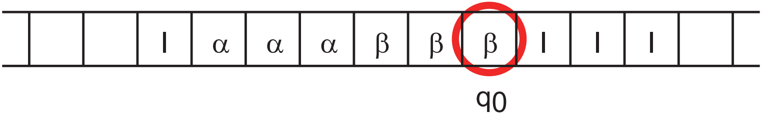
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
I	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

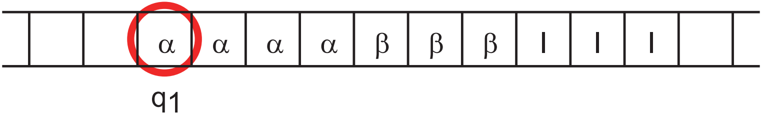
計算過程

			I	α	α	α	β	β	β	I	I	I	

q0

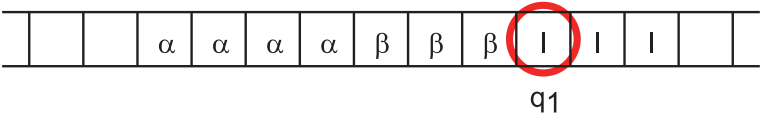
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



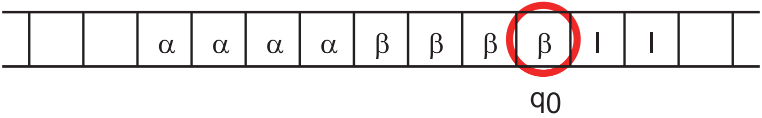
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



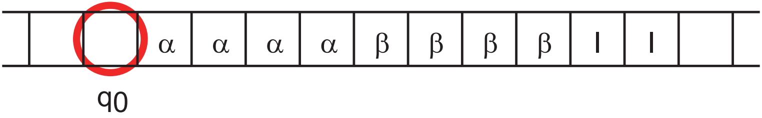
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



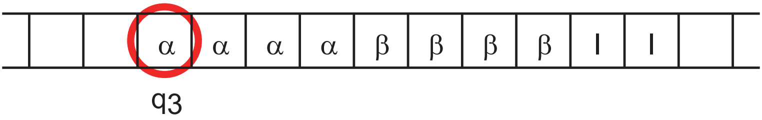
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



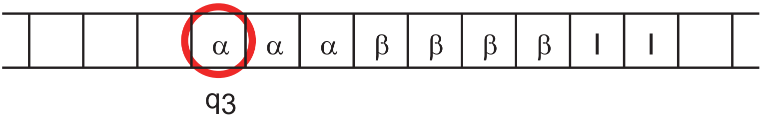
	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	$\mathrm{R}q_3$	$\mathrm{L}q_2$	$\mathrm{R}q_0$	!

計算過程



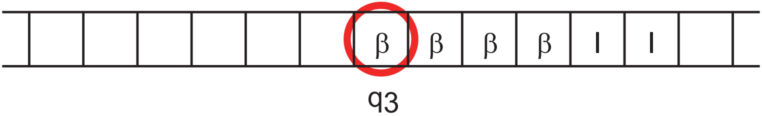
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



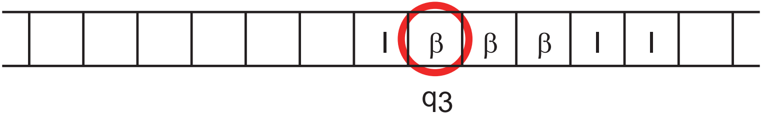
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



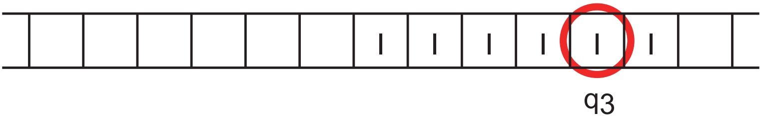
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

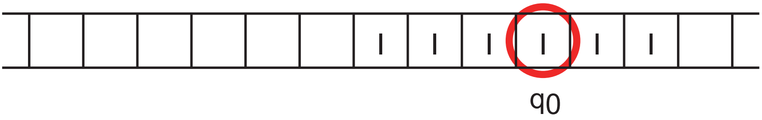
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ \ q_1$	$\beta\ \ q_0$	$\mathrm{R}q_0$	$\mathrm{L}q_0$

計算過程

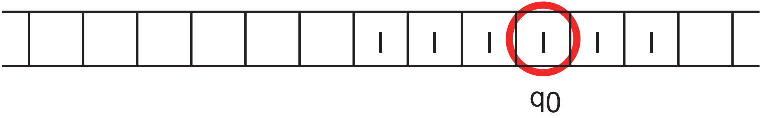
計算 $6 - 4 = 2$ の完了



	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

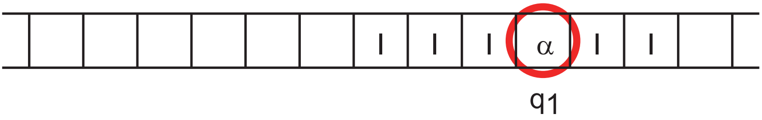
計算過程

4 と 2 の差を計算



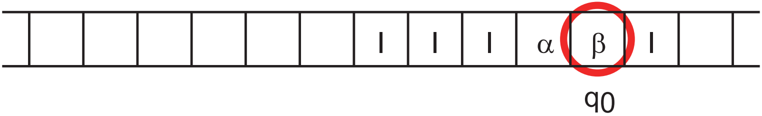
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	$\mathrm{R}q_0$	$\mathrm{L}q_0$

計算過程



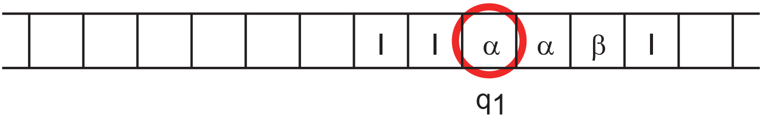
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



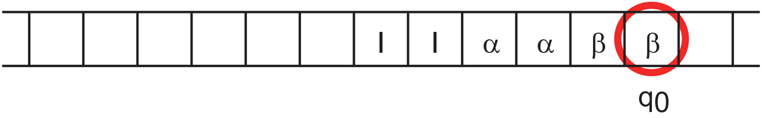
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



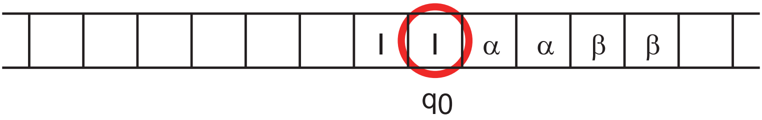
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



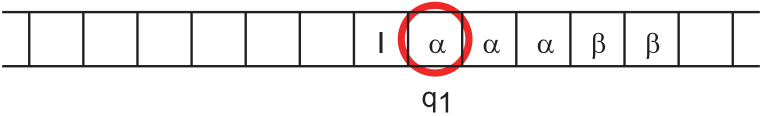
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



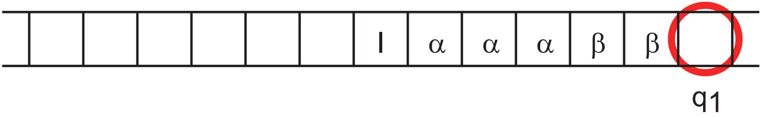
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

計算過程



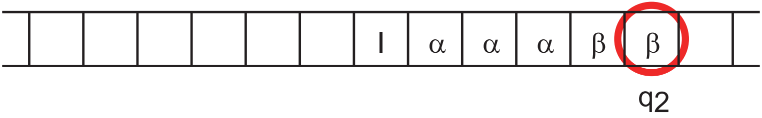
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



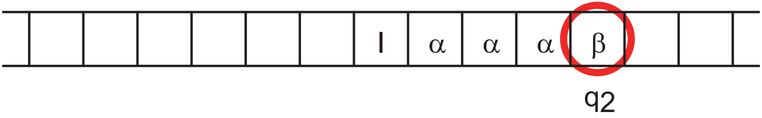
	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	$\mathrm{R}q_3$	$\mathrm{L}q_2$	$\mathrm{R}q_0$	!

計算過程



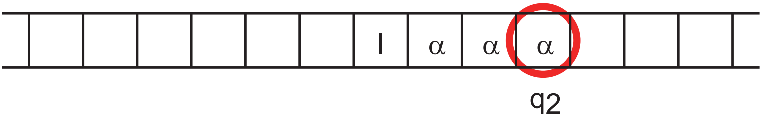
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



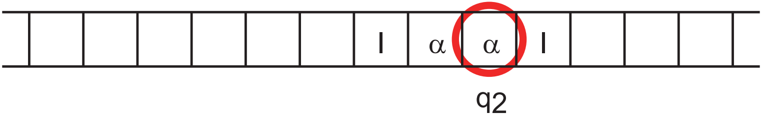
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	ΛL	IR

計算過程



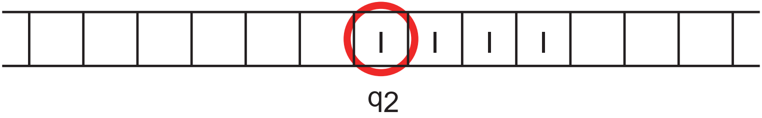
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

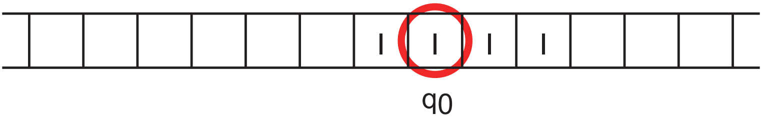
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	Rq_0	Lq_0

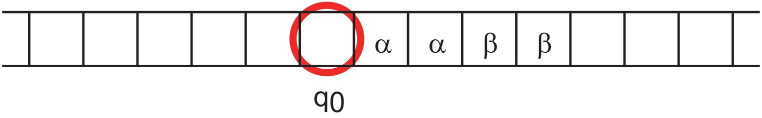
計算過程

計算 $4-2=2$ の完了　2 と 2 の差を計算



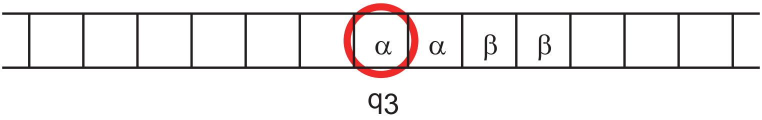
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	$\alpha\ q_1$	$\beta\ q_0$	$\mathrm{R}q_0$	$\mathrm{L}q_0$

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	$\mathrm{R}q_3$	$\mathrm{L}q_2$	$\mathrm{R}q_0$	!

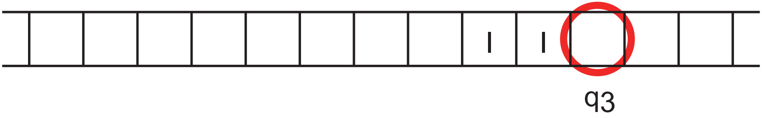
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	ΛR

計算過程

計算 $2-2=0$ の完了　停止!



	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	$\mathrm{R}q_3$	$\mathrm{L}q_2$	$\mathrm{R}q_0$	!

チャーチの提案

チューリングマシン = コンピュータ

機能表 = プログラム = アルゴリズム
チューリングマシンが停止することが条件

停止問題とは

停止　アルゴリズムの条件

アルゴリズム＝チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力　チューリングマシンの機能表
出力　停止する or 停止しない

停止問題とは

停止　アルゴリズムの条件

アルゴリズム＝チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力　チューリングマシンの機能表
出力　停止する or 停止しない

X　存在しない

停止しない例

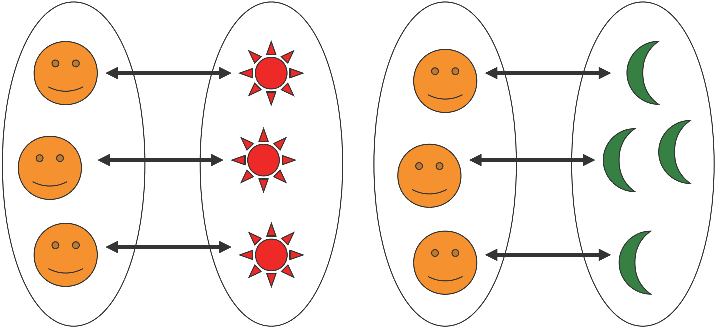
	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
2	3 q_2	!	R
3	4 q_2	!	R
4	5 q_2	!	R
5	6 q_2	!	R

	q_0	q_1	q_2
6	7 q_2	!	R
7	8 q_2	!	R
8	9 q_2	!	R
9	0L	!	R
Λ	1 q_2	!	Lq_0
I	L	ΛLq_0	R

無限を数える

自然数
偶数　どちらが多いか?

一対一対応が可能ならば個数は等しい



自然数と偶数

自然数		偶数
1	$\Longleftrightarrow$	2
2	$\Longleftrightarrow$	4
3	$\Longleftrightarrow$	6
4	$\Longleftrightarrow$	8
5	$\Longleftrightarrow$	10
6	$\Longleftrightarrow$	12
7	$\Longleftrightarrow$	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

二つの無限集合で
一対一対応が可能

$\Updownarrow$

同じ濃度を持つ

自然数と偶数は同じ濃度

自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\Longleftrightarrow$	$0.2332988076\cdots$
2	$\Longleftrightarrow$	$0.3142592650\cdots$
3	$\Longleftrightarrow$	$0.5000000000\cdots$
4	$\Longleftrightarrow$	$0.0100100200\cdots$
5	$\Longleftrightarrow$	$0.7777777777\cdots$
6	$\Longleftrightarrow$	$0.4587009871\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

自然数と実数 [0, 1)

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\Longleftrightarrow$	0.2332988076$\cdots$
2	$\Longleftrightarrow$	0.3142592650$\cdots$
3	$\Longleftrightarrow$	0.5000000000$\cdots$
4	$\Longleftrightarrow$	0.0100100200$\cdots$
5	$\Longleftrightarrow$	0.7777777777$\cdots$
6	$\Longleftrightarrow$	0.4587009871$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

自然数と実数 [0, 1)

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\Longleftrightarrow$	$0.2332988076\cdots$
2	$\Longleftrightarrow$	$0.3142592650\cdots$
3	$\Longleftrightarrow$	$0.5000000000\cdots$
4	$\Longleftrightarrow$	$0.0100100200\cdots$
5	$\Longleftrightarrow$	$0.7777777777\cdots$
6	$\Longleftrightarrow$	$0.4587009871\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どの自然数にも対応しない実数 $0.321181\cdots$ が存在

自然数と実数 $[0, 1)$

一対一対応が可能と仮定

自然数		実数
1	$\Longleftrightarrow$	$0.2332988076\cdots$
2	$\Longleftrightarrow$	$0.3142592650\cdots$
3	$\Longleftrightarrow$	$0.5000000000\cdots$
4	$\Longleftrightarrow$	$0.0100100200\cdots$
5	$\Longleftrightarrow$	$0.7777777777\cdots$
6	$\Longleftrightarrow$	$0.4587009871\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

どの自然数にも対応しない実数 $0.321181\cdots$ が存在

仮定は誤り　一対一対応は不可能

自然数と実数 $[0, 1)$

実数は自然数と一対一対応させることができない（実数が余る）

$$\Downarrow$$

実数は自然数より濃度が濃い

対角線論法

プログラム＝文字列

機能表 ＝ 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
$\vdots$		$\vdots$	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1,$\cdots$,Λ,I;q_0,q_1,q_2;1 q_2,!,R;2 q_2,!,R;$\cdots$1 q_2,!,Lq_1;L,ΛLq_0,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム＝文字列

機能表 ＝ 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1,$\cdots$,Λ,I;q_0,q_1,q_2;1 q_2,!,R;2 q_2,!,R;$\cdots$1 q_2,!,Lq_1;L,ΛLq_0,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム＝文字列

機能表 ＝ 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1,$\cdots$,Λ,I;q_0,q_1,q_2;1 q_2,!,R;2 q_2,!,R;$\cdots$1 q_2,!,Lq_1;L,ΛLq_0,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム＝文字列

機能表 ＝ 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1,$\cdots$,Λ,I;q_0,q_1,q_2;1 q_2,!,R;2 q_2,!,R;$\cdots$1 q_2,!,Lq_1;L,ΛLq_0,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム＝文字列

機能表 ＝ 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

$\Longleftrightarrow$

12,3;0,1,$\cdots$,Λ,I;q_0,q_1,q_2;1 q_2,!,R;2 q_2,!,R;$\cdots$1 q_2,!,Lq_1;L,ΛLq_0,R;

アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム＝文字列

機能表: 文字列（長さ有限）

$\Updownarrow$

テープの初期文字列 TM として
チューリングマシンへ入力可能

プログラム＝文字列

文字列と機能表の濃度

文字列 $\Longleftrightarrow$ 自然数

文字列 390IIII

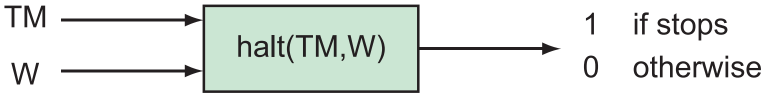
$\Updownarrow$

文字コード 0x33 0x39 0x30 0x49 0x49 0x49 0x49
16 進数 333930494949：自然数

機能表 $\Longleftrightarrow$ 自然数

機能表 $\Longleftrightarrow$ 文字列
文字列 $\Longleftrightarrow$ 自然数

停止性判定チューリングマシン



入力　チューリングマシンの機能表 TM
　　　テープの文字列 W

出力　1　TM に W を入力すると停止
　　　0　それ以外

仮定
停止性チューリングマシン halt(TM,W) が存在する

停止性判定チューリングマシンの出力

テープの文字列

機能表

	W1	W2	W3	W4	⋯
TM1	1	1	1	1	⋯
TM2	1	0	0	1	⋯
TM3	0	1	0	1	⋯
TM4	1	1	1	1	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

1: 停止　0: 停止しない

停止性判定チューリングマシンの出力

テープの文字列

機能表

	W1	W2	W3	W4	$\cdots$
TM1	1	1	1	1	$\cdots$
TM2	1	0	0	1	$\cdots$
TM3	0	1	0	1	$\cdots$
TM4	1	1	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

1: 停止　0: 停止しない

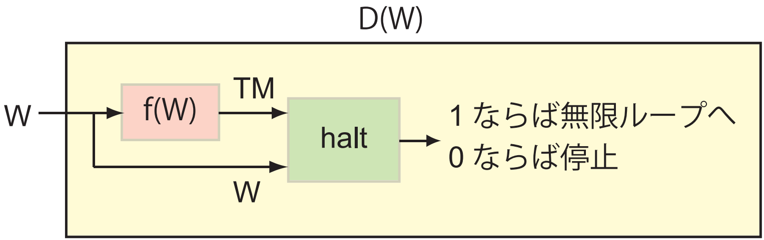
関数 f(W)

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{W1} & \Longleftrightarrow & \mathrm{TM1} \\
\mathrm{W2} & \Longleftrightarrow & \mathrm{TM2} \\
\mathrm{W3} & \Longleftrightarrow & \mathrm{TM3} \\
\mathrm{W4} & \Longleftrightarrow & \mathrm{TM4} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{c}
\mathrm{f(W1)=TM1} \\
\mathrm{f(W2)=TM2} \\
\mathrm{f(W3)=TM3} \\
\mathrm{f(W4)=TM4} \\
\vdots
\end{array}
$$

一対一対応可能
同じ濃度

関数を定義できる

チューリングマシン D(W)



入力　テープの文字列 W

出力　停止あるいは無限ループ

チューリングマシン halt(TM,W) が存在するならば
チューリングマシン D(W) は存在する

チューリングマシン D(W)

halt(TM1,W1)=1
halt(TM2,W2)=0
halt(TM3,W3)=0 $\Longrightarrow$
halt(TM4,W4)=1

$\vdots$

$\Downarrow$

チューリングマシン D(W)

halt(TM1,W1)=1		D(W1)	停止しない
halt(TM2,W2)=0		D(W2)	停止
halt(TM3,W3)=0	$\Longrightarrow$	D(W3)	停止
halt(TM4,W4)=1		D(W4)	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

$\Downarrow$

チューリングマシン D(W)

halt(TM1,W1)=1		D(W1)	停止しない
halt(TM2,W2)=0		D(W2)	停止
halt(TM3,W3)=0	$\Longrightarrow$	D(W3)	停止
halt(TM4,W4)=1		D(W4)	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

$\Downarrow$

TM1(W1)	停止
TM2(W2)	停止しない
TM3(W3)	停止しない
TM4(W4)	停止
$\vdots$	$\vdots$

チューリングマシン D(W)

halt(TM1,W1)=1	$\Longrightarrow$	D(W1)	停止しない
halt(TM2,W2)=0		D(W2)	停止
halt(TM3,W3)=0		D(W3)	停止
halt(TM4,W4)=1		D(W4)	停止しない
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

$\Downarrow$

TM1(W1)	停止	$D \neq$ TM1
TM2(W2)	停止しない	$D \neq$ TM2
TM3(W3)	停止しない	$D \neq$ TM3
TM4(W4)	停止	$D \neq$ TM4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

チューリングマシンD(W)

$$\begin{gathered} \mathrm{D} \neq \mathrm{TM1} \\ \mathrm{D} \neq \mathrm{TM2} \\ \mathrm{D} \neq \mathrm{TM3} \\ \mathrm{D} \neq \mathrm{TM4} \\ \vdots \\ \Downarrow \end{gathered}$$

D は存在しない　*i.e.*　halt は存在しない

まとめ

コンピュータの原理

コンピュータ ＝ チューリングマシン
アルゴリズム ＝ プログラム ＝ 機能表

停止問題

チューリングマシンでは解くことができない
コンピュータでは解くことができない

レポート

下記の問題に答え，pdf ファイルで manaba+R に提出する．

ファイル名：学籍番号（11 桁半角数字）名前（空白なし）.pdf
例えば　12345678901 平井慎一.pdf
　　　　12345678901HiraiShinichi.pdf

締切：10 月 28 日（月曜）午前 1 時

(1)　自然数 $1, 2, 3, \cdots$ と整数 $\cdots, -3, -2 - 1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ が同じ濃度を持つことを示せ．

(2)　実数 $[0, 1)$ と二次元空間 $[0, 1) \times [0, 1)$ 内の点が同じ濃度を持つことを示せ．

$$[0, 1) \times [0, 1) = \{(x, y) \mid x \in [0, 1), y \in [0, 1)\}$$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

偶数 n に対して，一つの自然数 n が対応する.
したがって，偶数と自然数は一対一対応する.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{偶数} & & \text{自然数} \\
 & & 1 \\
2 & \Longrightarrow & 2 \\
 & & 3 \\
4 & \Longrightarrow & 4 \\
 & & 5 \\
6 & \Longrightarrow & 6 \\
 & & 7 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

自然数 k に対して，一つの偶数 $4k$ が対応する.
したがって，自然数と偶数は一対一対応する.

偶数		自然数
2		
4	$\Longleftarrow$	1
6		
8	$\Longleftarrow$	2
10		
12	$\Longleftarrow$	3
14		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか.

偶数 n に対して，一つの自然数 n が対応する.
自然数 k に対して，一つの偶数 $4k$ が対応する.
したがって，偶数と自然数は一対一対応する.

偶数の集合を E，自然数の集合を N で表す.
任意の $n \in E$ に対して，$n \in N$ が対応する.
これより，$E \subset N$ である.
任意の $k \in N$ に対して，$4k \in E$ が対応する.
これより，$N \subset E$ である.
したがって，集合 E と集合 N は一対一対応する.