

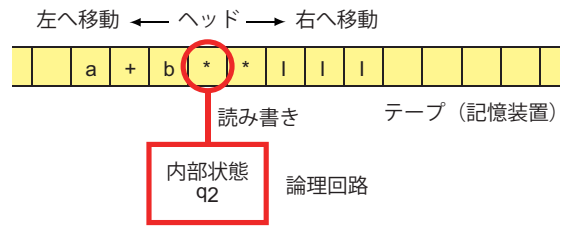
知能科学：チューリングマシン

平井 慎一

立命館大学 ロボティクス学科

チューリングマシン

コンピュータのモデルとなる仮想的な機械
(提唱 1936年 コンピュータの実現より先)



講義の流れ

- ① チューリング
- ② チューリングマシン
- ③ 動作例
 - 加算
 - 数える
 - 最大公約数
- ④ チャーチの提案
- ⑤ 停止問題
- ⑥ まとめ

チューリングマシン

アルファベット 有限個 (たとえば a, b, c, 0, 1)
空白を Λ で表す
ヘッドの移動 L(left, 左), R(right, 右), F(fix, 静止)
内部状態 有限個 (たとえば q_0, q_1, q_2, q_3)
停止を ! で表す

入力アルファベット テープから読み込む
出力アルファベット テープに書き込む



チューリング Alan Turing (1912 - 1954)

- イギリスの数学者
- チューリングマシン (Turing machine) の考案者
- チューリングテスト (Turing test) の考案者
- 暗号解読への貢献 (ボンベによるエニグマの解読. ボンベはレイエフスキ (ポーランド) の発明)
- チューリング賞 (計算機科学分野のノーベル賞)
- 映画「イミテーション・ゲーム」
- 2019年 英国 50ポンド札の肖像に選ばれる (札は 2021年より流通)

機能表

		現在の状態		
		q_0	q_1	q_2
入力アルファベット	I	$\Lambda R q_2$	$I L q_1$	$I R q_2$
	Λ	$\Lambda R q_0$	$\Lambda R q_0$	$I F q_1$
	*	$\Lambda !$	$* L q_1$	$* R q_2$

$* L q_1$
出力アルファベット ヘッドの移動 次の状態

チューリング Alan Turing (1912 - 1954)



Alan Turing to feature on new £50 banknote

Mathematician who cracked Enigma code was persecuted for his homosexuality in 1950s

The father of modern computing: Alan Turing's legacy

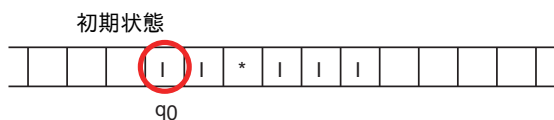


機能表 (省略形)

		現在の状態		
		q_0	q_1	q_2
入力アルファベット	I	$\Lambda R q_2$	L	R
	Λ	R	$R q_0$	$I q_1$
	*	$\Lambda !$	L	R

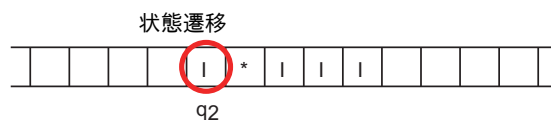
$* L q_1$
出力アルファベット ヘッドの移動 次の状態

動作例



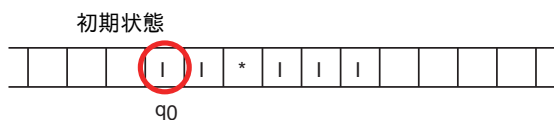
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



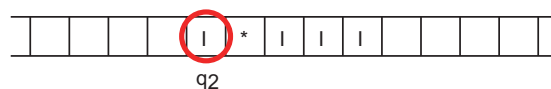
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



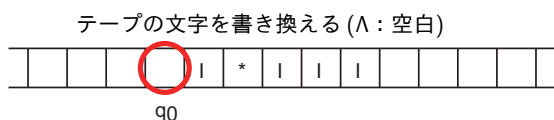
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



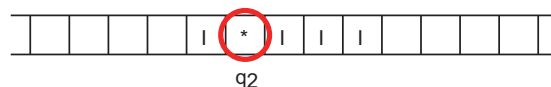
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



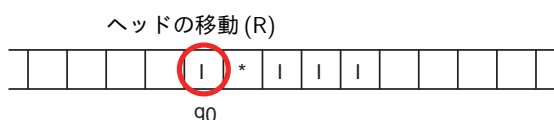
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



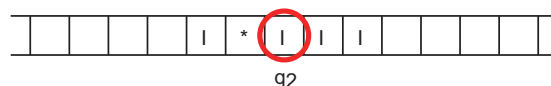
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



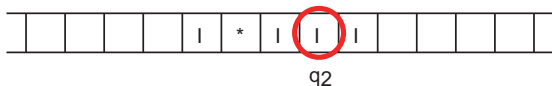
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



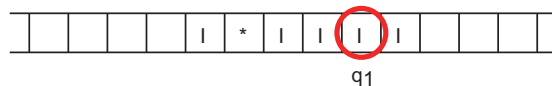
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



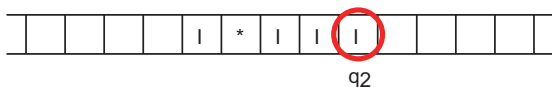
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



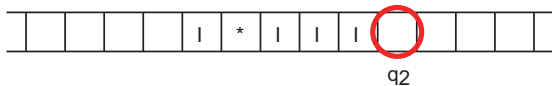
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



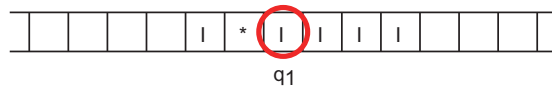
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



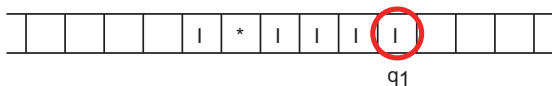
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



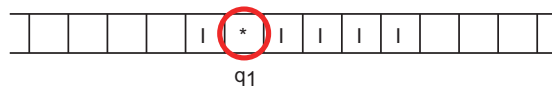
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



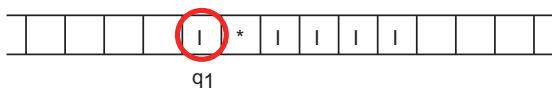
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



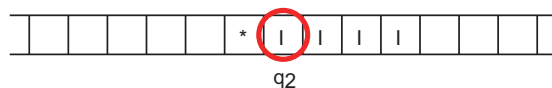
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



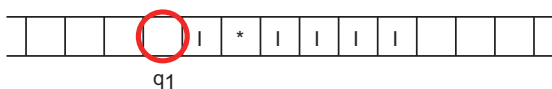
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



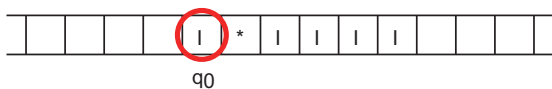
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



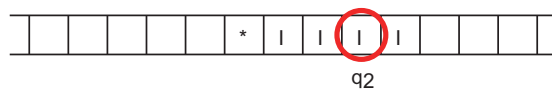
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



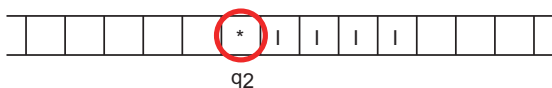
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



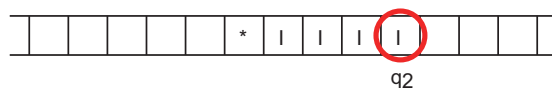
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



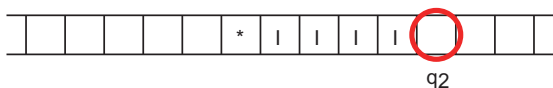
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
Λ	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



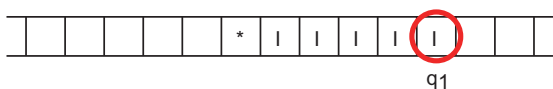
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



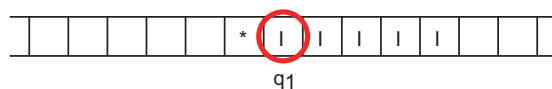
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



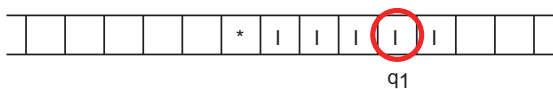
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



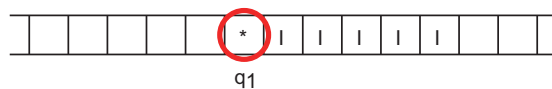
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



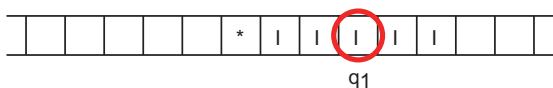
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



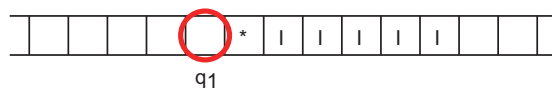
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



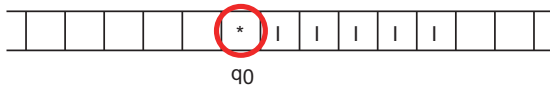
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



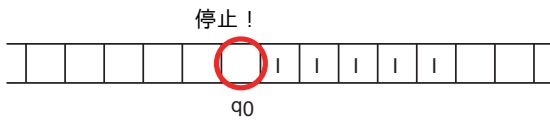
	q_0	q_1	q_2
	$\Lambda R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	q_1
*	$\Lambda!$	L	R

動作例



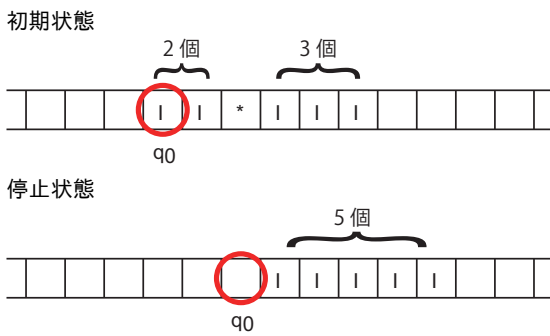
	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	I q_1
*	$\wedge!$	L	R

動作例



	q_0	q_1	q_2
I	$\wedge R q_2$	L	R
\wedge	R	$R q_0$	I q_1
*	$\wedge!$	L	R

動作例

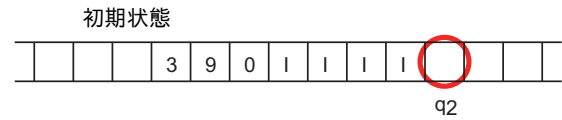


加算を計算する機能表

個数を数えて十進数で表す

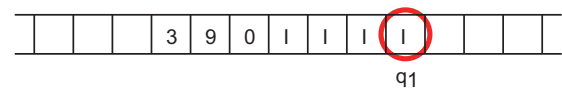
	q_0	q_1	q_2		q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R	6	7 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R	7	8 q_2	!	R
2	3 q_2	!	R	8	9 q_2	!	R
3	4 q_2	!	R	9	0L	!	R
4	5 q_2	!	R	\wedge	1 q_2	!	L q_1
5	6 q_2	!	R	I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



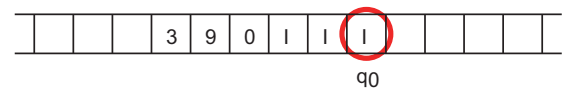
	q_0	q_1	q_2
\wedge	1 q_2	!	L q_1

個数を数えて十進数で表す



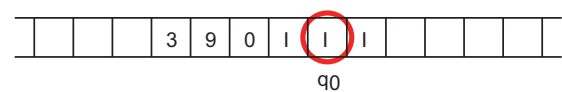
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



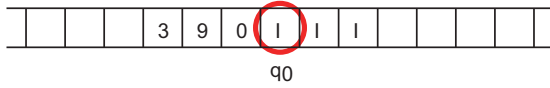
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



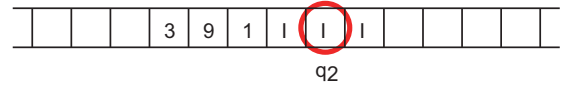
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



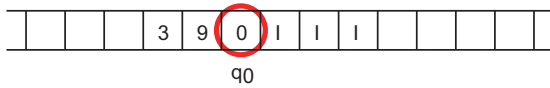
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



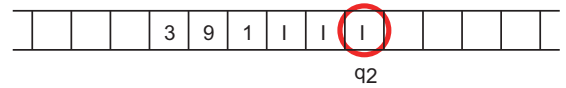
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



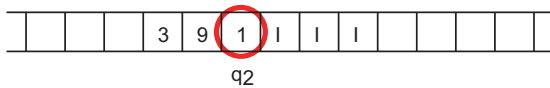
	q_0	q_1	q_2
0	$1 q_2$!	R

個数を数えて十進数で表す



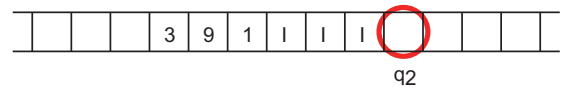
	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

個数を数えて十進数で表す



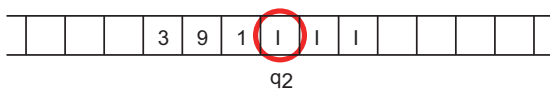
	q_0	q_1	q_2
1	$2 q_2$!	R

個数を数えて十進数で表す



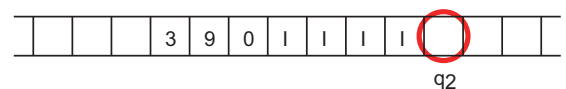
	q_0	q_1	q_2
\wedge	$1 q_2$!	$L q_1$

個数を数えて十進数で表す

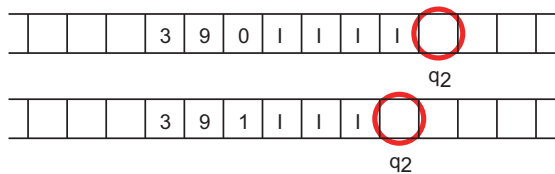


	q_0	q_1	q_2
I	L	$\wedge L q_0$	R

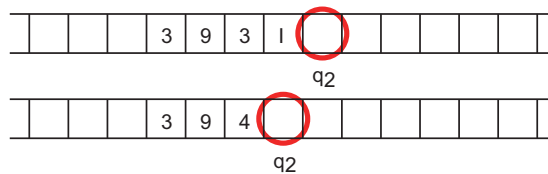
個数を数えて十進数で表す



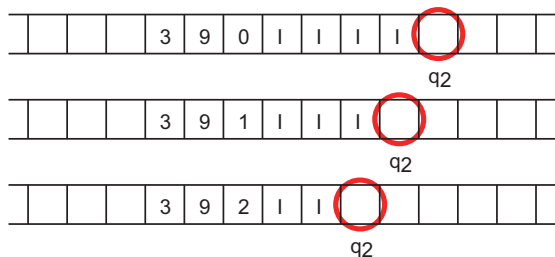
個数を数えて十進数で表す



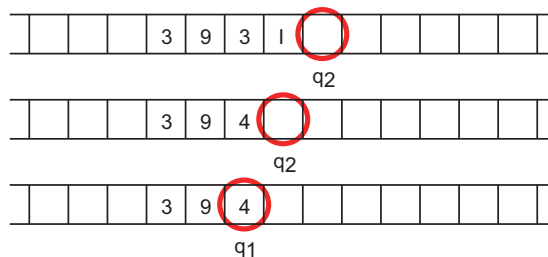
個数を数えて十進数で表す



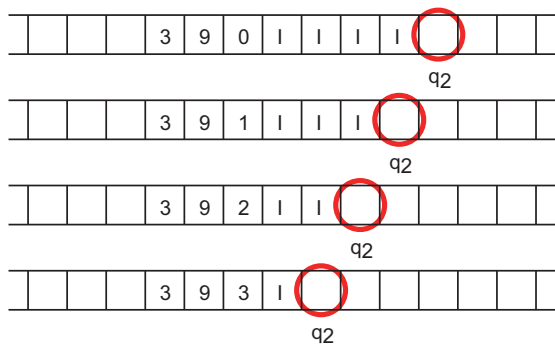
個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す



個数を数えて十進数で表す

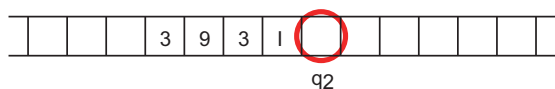
問題

初期状態

から最終状態

への過程を記せ

個数を数えて十進数で表す



ユークリッドの互除法

4 と 6 の最大公約数を求める

ユークリッドの互除法

4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

ユークリッドの互除法

4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

ユークリッドの互除法

4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

ユークリッドの互除法

4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

$$2 - 2 = 0$$

最大公約数は2

ユークリッドの互除法

4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

ユークリッドの互除法の機能表

	q_0	q_1	q_2	q_3
I	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	!
α	L	R	IL	ΛR
β	L	R	ΛL	IR

ユークリッドの互除法

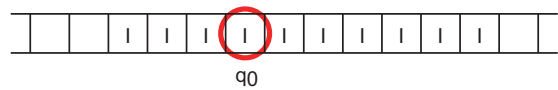
4と6の最大公約数を求める

$$6 - 4 = 2$$

$$4 - 2 = 2$$

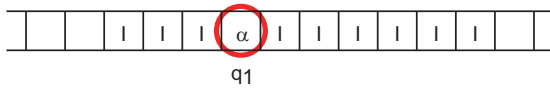
計算過程

4と6の差を計算



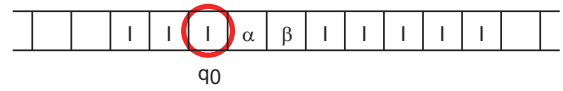
	q_0	q_1	q_2	q_3
I	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



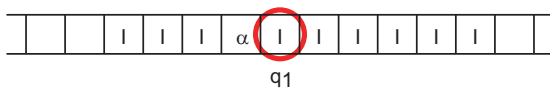
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	\wedge R

計算過程



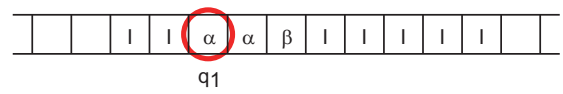
	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



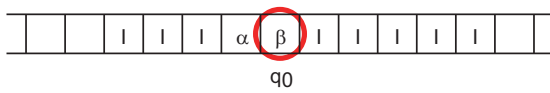
	q_0	q_1	q_2	q_3
	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



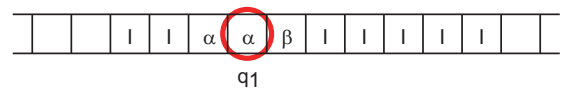
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	\wedge R

計算過程



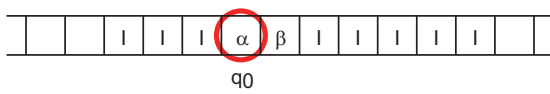
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	\wedge L	IR

計算過程



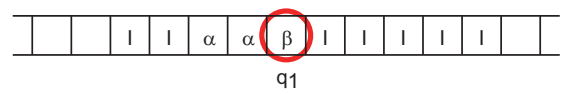
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	\wedge R

計算過程



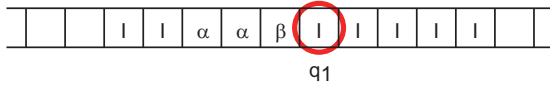
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	\wedge R

計算過程



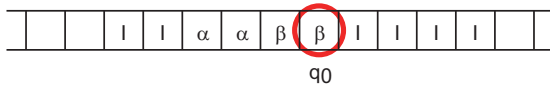
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	\wedge L	IR

計算過程



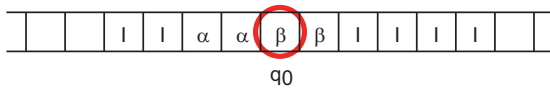
	q_0	q_1	q_2	q_3	
I	α	q_1	β	q_0	
α			R	q_0	
β				L	q_0

計算過程



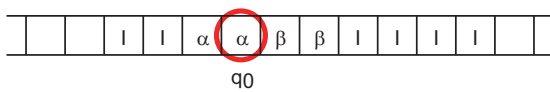
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	Λ L	IR

計算過程



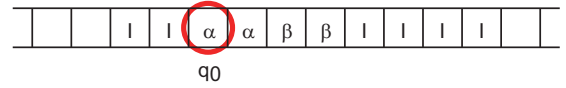
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	Λ L	IR

計算過程



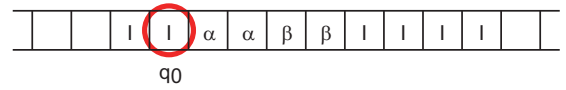
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	Λ R

計算過程



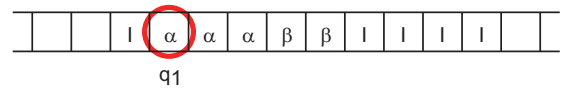
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	Λ R

計算過程



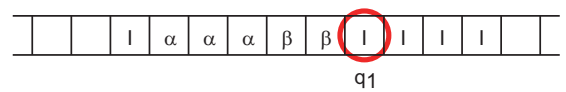
	q_0	q_1	q_2	q_3	
I	α	q_1	β	q_0	
α			R	q_0	
β				L	q_0

計算過程



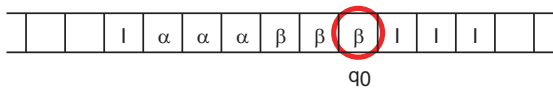
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	Λ R

計算過程



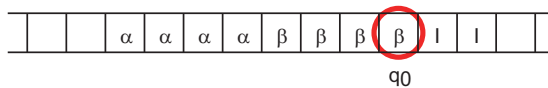
	q_0	q_1	q_2	q_3	
I	α	q_1	β	q_0	
α			R	q_0	
β				L	q_0

計算過程



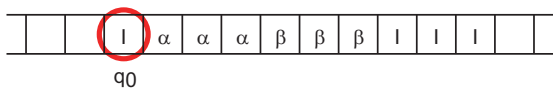
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



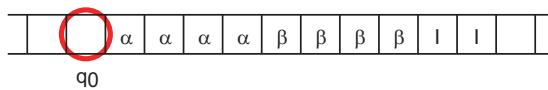
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



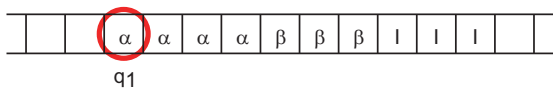
	q_0	q_1	q_2	q_3
	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



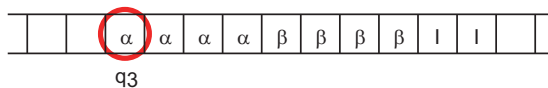
	q_0	q_1	q_2	q_3
\wedge	Rq_3	Lq_2	Rq_0	!

計算過程



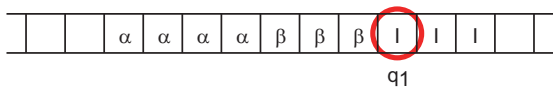
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



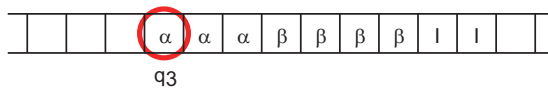
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



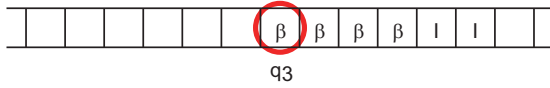
	q_0	q_1	q_2	q_3
	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	\wedge L	IR

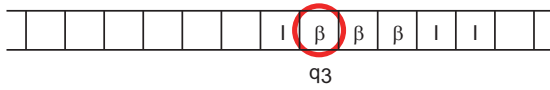
計算過程

4 と 2 の差を計算



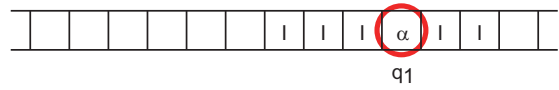
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



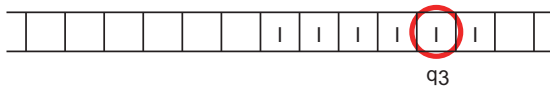
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	\wedge L	IR

計算過程



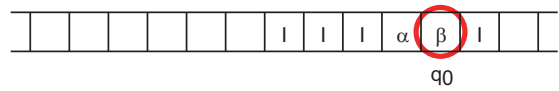
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	\wedge R

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

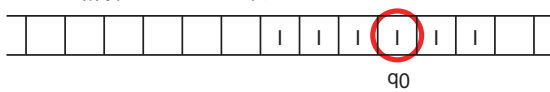
計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	\wedge L	IR

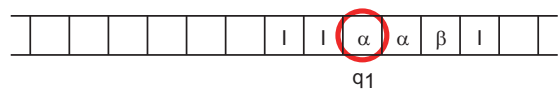
計算過程

計算 $6 - 4 = 2$ の完了



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	α q_1	β q_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



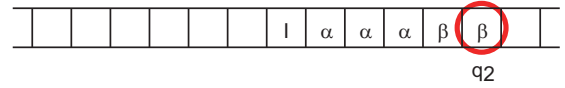
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	\wedge R

計算過程



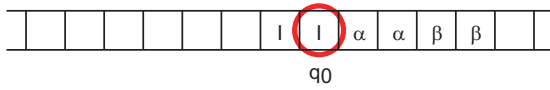
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



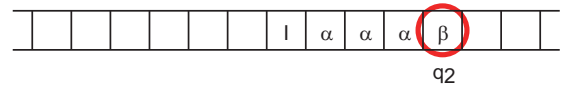
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



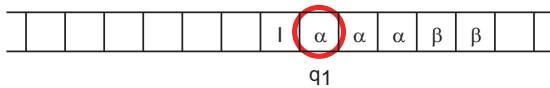
	q_0	q_1	q_2	q_3
	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



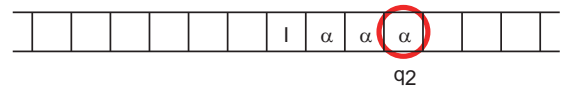
	q_0	q_1	q_2	q_3
β	L	R	$\wedge L$	IR

計算過程



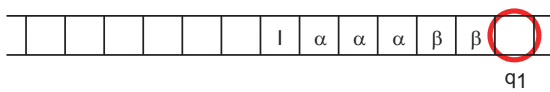
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



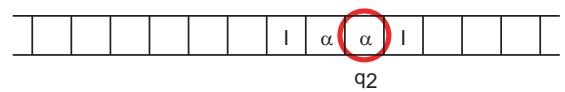
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



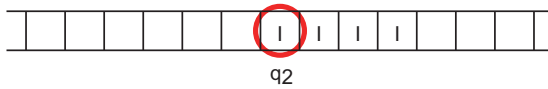
	q_0	q_1	q_2	q_3
\wedge	Rq_3	Lq_2	Rq_0	!

計算過程



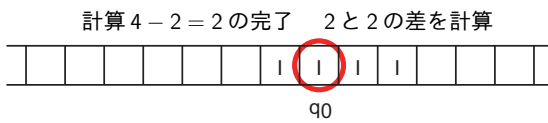
	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	$\wedge R$

計算過程



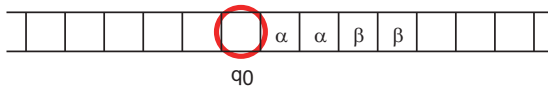
	q_0	q_1	q_2	q_3
$ $	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



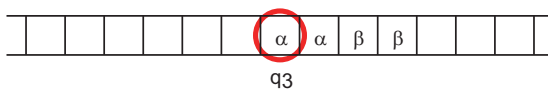
	q_0	q_1	q_2	q_3
$ $	αq_1	βq_0	Rq_0	Lq_0

計算過程



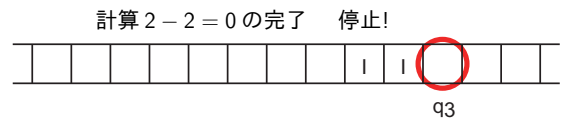
	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	$!$

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
α	L	R	IL	AR

計算過程



	q_0	q_1	q_2	q_3
Λ	Rq_3	Lq_2	Rq_0	$!$

チャーチの提案

チューリングマシン = コンピュータ

機能表 = プログラム = アルゴリズム
 チューリングマシンが停止することが条件

停止問題とは

停止 アルゴリズムの条件
 アルゴリズム = チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力 チューリングマシンの機能表
 出力 停止する or 停止しない

停止問題とは

停止 アルゴリズムの条件
 アルゴリズム = チューリングマシンの機能表

停止するか否かを判定するチューリングマシン

入力 チューリングマシンの機能表
 出力 停止する or 停止しない

X 存在しない

停止しない例

	q_0	q_1	q_2		q_0	q_1	q_2		
0	1	q_2	!	R	6	7	q_2	!	R
1	2	q_2	!	R	7	8	q_2	!	R
2	3	q_2	!	R	8	9	q_2	!	R
3	4	q_2	!	R	9	0L	!	R	
4	5	q_2	!	R	\wedge	1	q_2	!	Lq_0
5	6	q_2	!	R	I	L	$\wedge Lq_0$		R

自然数と実数 [0, 1]

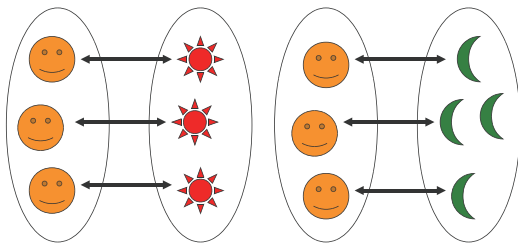
一対対応が可能と仮定

自然数		実数
1	\iff	0.2332988076...
2	\iff	0.3142592650...
3	\iff	0.5000000000...
4	\iff	0.0100100200...
5	\iff	0.7777777777...
6	\iff	0.4587009871...
\vdots	\vdots	\vdots

無限を数える

自然数
偶数
どちらが多いか?

一対対応が可能ならば個数は等しい



自然数と実数 [0, 1]

一対対応が可能と仮定

自然数		実数
1	\iff	0.2332988076...
2	\iff	0.3142592650...
3	\iff	0.5000000000...
4	\iff	0.0100100200...
5	\iff	0.7777777777...
6	\iff	0.4587009871...
\vdots	\vdots	\vdots

どの自然数にも対応しない実数 0.321181... が存在

自然数と偶数

自然数		偶数
1	\iff	2
2	\iff	4
3	\iff	6
4	\iff	8
5	\iff	10
6	\iff	12
7	\iff	14
\vdots	\vdots	\vdots

二つの無限集合で
一対対応が可能

\updownarrow

同じ濃度を持つ

自然数と偶数は同じ濃度

自然数と実数 [0, 1]

一対対応が可能と仮定

自然数		実数
1	\iff	0.2332988076...
2	\iff	0.3142592650...
3	\iff	0.5000000000...
4	\iff	0.0100100200...
5	\iff	0.7777777777...
6	\iff	0.4587009871...
\vdots	\vdots	\vdots

どの自然数にも対応しない実数 0.321181... が存在
仮定は誤り 一対対応は不可能

自然数と実数 [0, 1]

一対対応が可能と仮定

自然数		実数
1	\iff	0.2332988076...
2	\iff	0.3142592650...
3	\iff	0.5000000000...
4	\iff	0.0100100200...
5	\iff	0.7777777777...
6	\iff	0.4587009871...
\vdots	\vdots	\vdots

実数は自然数と一対対応させることが
できない (実数が余る)

\Downarrow

実数は自然数より濃度が濃い

対角線論法

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

⇔

12,3;0,1,⋯,Λ,I;q₀,q₁,q₂;1 q₂!,R;2 q₂!,R;⋯1 q₂!,Lq₁;L,ΛLq₀,R;
 アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
 内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

⇔

12,3;0,1,⋯,Λ,I;q₀,q₁,q₂;1 q₂!,R;2 q₂!,R;⋯1 q₂!,Lq₁;L,ΛLq₀,R;
 アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
 内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

⇔

12,3;0,1,⋯,Λ,I;q₀,q₁,q₂;1 q₂!,R;2 q₂!,R;⋯1 q₂!,Lq₁;L,ΛLq₀,R;
 アルファベットと内部状態の個数; **アルファベット**;
 内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

⇔

12,3;0,1,⋯,Λ,I;q₀,q₁,q₂;1 q₂!,R;2 q₂!,R;⋯1 q₂!,Lq₁;L,ΛLq₀,R;
 アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
内部状態; 遷移則

プログラム = 文字列

機能表 = 文字列

	q_0	q_1	q_2
0	1 q_2	!	R
1	2 q_2	!	R
⋮		⋮	
Λ	1 q_2	!	Lq_1
I	L	ΛLq_0	R

⇔

12,3;0,1,⋯,Λ,I;q₀,q₁,q₂;1 q₂!,R;2 q₂!,R;⋯1 q₂!,Lq₁;L,ΛLq₀,R;
 アルファベットと内部状態の個数; アルファベット;
 内部状態; **遷移則**

プログラム = 文字列

機能表: 文字列 (長さ有限)

⇕

テープの初期文字列 **TM** として
 チューリングマシンへ入力可能

プログラム = 文字列

文字列と機能表の濃度

文字列 ⇔ 自然数

文字列 390IIII

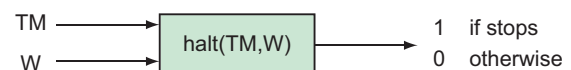
⇕

文字コード 0x33 0x39 0x30 0x49 0x49 0x49 0x49
 16 進数 333930494949 : 自然数

機能表 ⇔ 自然数

機能表 ⇔ 文字列
 文字列 ⇔ 自然数

停止性判定チューリングマシン



入力 チューリングマシンの機能表 TM
 テープの文字列 W

出力 1 TM に W を入力すると停止
 0 それ以外

仮定
 停止性チューリングマシン halt(TM,W) が存在する

停止性判定チューリングマシンの出力

テープの文字列

	W1	W2	W3	W4	...
TM1	1	1	1	1	...
TM2	1	0	0	1	...
TM3	0	1	0	1	...
TM4	1	1	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

機能表

1: 停止 0: 停止しない

チューリングマシン D(W)

$halt(TM1, W1)=1$
 $halt(TM2, W2)=0$
 $halt(TM3, W3)=0$
 $halt(TM4, W4)=1$
 ⋮

⇒

↓

停止性判定チューリングマシンの出力

テープの文字列

	W1	W2	W3	W4	...
TM1	1	1	1	1	...
TM2	1	0	0	1	...
TM3	0	1	0	1	...
TM4	1	1	1	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

機能表

1: 停止 0: 停止しない

チューリングマシン D(W)

$halt(TM1, W1)=1$
 $halt(TM2, W2)=0$
 $halt(TM3, W3)=0$
 $halt(TM4, W4)=1$
 ⋮

⇒

↓

$D(W1)$ 停止しない
 $D(W2)$ 停止
 $D(W3)$ 停止
 $D(W4)$ 停止しない
 ⋮

関数 f(W)

$W1 \iff TM1$	⇒	$f(W1)=TM1$
$W2 \iff TM2$		$f(W2)=TM2$
$W3 \iff TM3$		$f(W3)=TM3$
$W4 \iff TM4$		$f(W4)=TM4$
⋮		⋮

一対一対応可能
 同じ濃度

関数を定義できる

チューリングマシン D(W)

$halt(TM1, W1)=1$
 $halt(TM2, W2)=0$
 $halt(TM3, W3)=0$
 $halt(TM4, W4)=1$
 ⋮

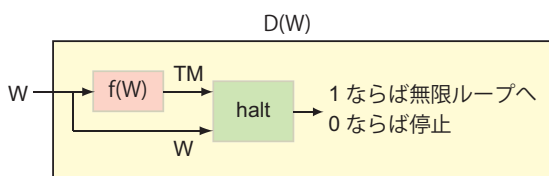
⇒

↓

$TM1(W1)$ 停止
 $TM2(W2)$ 停止しない
 $TM3(W3)$ 停止しない
 $TM4(W4)$ 停止
 ⋮

$D(W1)$ 停止しない
 $D(W2)$ 停止
 $D(W3)$ 停止
 $D(W4)$ 停止しない
 ⋮

チューリングマシン D(W)



入力 テープの文字列 W
 出力 停止あるいは無限ループ

チューリングマシン $halt(TM, W)$ が存在するならば
 チューリングマシン $D(W)$ は存在する

チューリングマシン D(W)

$halt(TM1, W1)=1$
 $halt(TM2, W2)=0$
 $halt(TM3, W3)=0$
 $halt(TM4, W4)=1$
 ⋮

⇒

↓

$D(W1)$ 停止しない
 $D(W2)$ 停止
 $D(W3)$ 停止
 $D(W4)$ 停止しない
 ⋮

$TM1(W1)$ 停止
 $TM2(W2)$ 停止しない
 $TM3(W3)$ 停止しない
 $TM4(W4)$ 停止
 ⋮

$D \neq TM1$
 $D \neq TM2$
 $D \neq TM3$
 $D \neq TM4$
 ⋮

チューリングマシン D(W)

$D \neq \text{TM1}$
 $D \neq \text{TM2}$
 $D \neq \text{TM3}$
 $D \neq \text{TM4}$
 \vdots



D は存在しない i.e. halt は存在しない

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか。

自然数 k に対して、一つの偶数 $4k$ が対応する。
したがって、自然数と偶数は一対一対応する。

偶数	自然数
2	
4	← 1
6	
8	← 2
10	
12	← 3
14	
⋮	⋮

まとめ

コンピュータの原理

コンピュータ = チューリングマシン
 アルゴリズム = プログラム = 機能表

停止問題

チューリングマシンでは解くことができない
 コンピュータでは解くことができない

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか。

偶数 n に対して、一つの自然数 n が対応する。
自然数 k に対して、一つの偶数 $4k$ が対応する。
したがって、偶数と自然数は一対一対応する。

偶数の集合を E 、自然数の集合を N で表す。
 任意の $n \in E$ に対して、 $n \in N$ が対応する。
 これより、 $E \subset N$ である。
 任意の $k \in N$ に対して、 $4k \in E$ が対応する。
 これより、 $N \subset E$ である。
 したがって、集合 E と集合 N は一対一対応する。

レポート

下記の問題に答え、pdf ファイルで manaba+R に提出する。

ファイル名：学籍番号 (11 桁半角数字) 名前 (空白なし) .pdf
 例えば 12345678901 平井慎一.pdf
 12345678901HiraiShinichi.pdf

締切：10月28日(月曜)午前1時

(1) 自然数 $1, 2, 3, \dots$ と整数 $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ が同じ濃度を持つことを示せ。

(2) 実数 $[0, 1)$ と二次元空間 $[0, 1) \times [0, 1)$ 内の点と同じ濃度を持つことを示せ。

$$[0, 1) \times [0, 1) = \{(x, y) \mid x \in [0, 1), y \in [0, 1)\}$$

付録：一対一対応

以下の説明は正しいか。

偶数 n に対して、一つの自然数 n が対応する。
したがって、偶数と自然数は一対一対応する。

偶数	自然数
	1
2	⇒ 2
	3
4	⇒ 4
	5
6	⇒ 6
	7
⋮	⋮