血液型の分布が世代交代によりどう変化するかを，解析的に調べる．すなわち，ある世代の父親と母親から生まれる子供の血液型の分布を定式化する．男児の血液型の分布と女児の血液型の分布は同じであると仮定する．子供の血液型が AA, AO, OO, BB, BO, AB である確率を表す 6×6 の行列 C_{aa}, C_{ao}, C_{oo}, C_{bb}, C_{bo}, C_{ab} を導入する．行は父親の血液型 AA, AO, OO, BB, BO, AB に，列は母親の血液型 AA, AO, OO, BB, BO, AB に対応する．たとえば，父親が AO（2 行目），母親が BO（5 列目）であるとき，子供が BO である確率は 1/4 であるので，$C_{bo}(2,5) = 1/4$ である．父親が AB（6 行目），母親が OO（3 列目）であるとき，子供が AO である確率は 1/2 であるので，$C_{ao}(6,3) = 1/2$ である．行列 C_{aa}, C_{ao}, C_{oo}, C_{bb}, C_{bo}, C_{ab} は，以下のように与えられる．

$$C_{aa} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$C_{ao} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{oo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$C_{bo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

父親の血液型が AA, AO, OO, BB, BO, AB である確率を，ベクトル $\boldsymbol{f} = [f_{aa}, f_{ao}, f_{oo}, f_{bb}, f_{bo}, f_{ab}]^{\mathrm{T}}$ で，母親の血液型が AA, AO, OO, BB, BO, AB である確率を，ベクトル $\boldsymbol{m} = [m_{aa}, m_{ao}, m_{oo}, m_{bb}, m_{bo}, m_{ab}]^{\mathrm{T}}$ で表す．子供の血液型が AA, AO, OO, BB, BO, AB である確率を，ベクトル $\boldsymbol{c} = [c_{aa}, c_{ao}, c_{oo}, c_{bb}, c_{bo}, c_{ab}]^{\mathrm{T}}$ で表す．子供の血液型が AA である確率 c_{aa} は，$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{aa} \boldsymbol{m}$ で計算することができる．他の血液型も同様に計算することができる．したがって，子供の血液型が AA, AO, OO, BB, BO, AB である確率は

$$\begin{aligned} c_{aa} &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{aa} \boldsymbol{m} \\ c_{ao} &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{ao} \boldsymbol{m} \\ c_{oo} &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{oo} \boldsymbol{m} \\ c_{bb} &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{bb} \boldsymbol{m} \\ c_{bo} &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{bo} \boldsymbol{m} \\ c_{ab} &= \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}} C_{ab} \boldsymbol{m} \end{aligned}$$

となる．

父親の血液型の分布と母親の血液型の分布は同じであると仮定する．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{m}$ を，世代 n の血液型の分布を表すベクトル $\boldsymbol{d}_n = [d^n_{aa}, d^n_{ao}, d^n_{oo}, d^n_{bb}, d^n_{bo}, d^n_{ab}]^{\mathrm{T}}$ とみなす．このとき，次の世代である子供の血

液型の分布は

$$
\begin{aligned}
d_{aa}^{n+1} &= \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{aa} \boldsymbol{d}_n \\
d_{ao}^{n+1} &= \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{ao} \boldsymbol{d}_n \\
d_{oo}^{n+1} &= \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{oo} \boldsymbol{d}_n \\
d_{bb}^{n+1} &= \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{bb} \boldsymbol{d}_n \\
d_{bo}^{n+1} &= \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{bo} \boldsymbol{d}_n \\
d_{ab}^{n+1} &= \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{ab} \boldsymbol{d}_n
\end{aligned}
$$

で計算することができる．すなわち漸化式

$$
\boldsymbol{d}_{n+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{aa} \boldsymbol{d}_n \\ \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{ao} \boldsymbol{d}_n \\ \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{oo} \boldsymbol{d}_n \\ \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{bb} \boldsymbol{d}_n \\ \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{bo} \boldsymbol{d}_n \\ \boldsymbol{d}_n^{\mathrm{T}} C_{ab} \boldsymbol{d}_n \end{bmatrix} \tag{1}
$$

により，世代 n の血液型の分布 $\boldsymbol{d}_n$ を計算することができる．なお

$$
C_{aa} + C_{ao} + C_{oo} + C_{bb} + C_{bo} + C_{ab} = I
$$

が成り立つので，$d_{aa}^n + d_{ao}^n + \cdots + d_{ab}^n = 1$ であるならば

$$
d_{aa}^{n+1} + d_{ao}^{n+1} + \cdots + d_{ab}^{n+1} = 1
$$

が保証される．

日本人の血液型の分布は，A 型が約 4 割，O 型が約 3 割，B 型が約 2 割，AB 型が約 1 割である．A 型の半分が AA，残りの半分が AO，B 型の半分が BB，残りの半分が BO と仮定し，$\boldsymbol{d} = [\,0.2, 0.2, 0.3, 0.1, 0.1, 0.1\,]^{\mathrm{T}}$ とおいて計算を進める．計算結果は

```
 0:  0.20000  0.20000  0.30000  0.10000  0.10000  0.10000
 1:  0.12250  0.31500  0.20250  0.04000  0.18000  0.14000
 2:  0.12250  0.31500  0.20250  0.04000  0.18000  0.14000
 3:  0.12250  0.31500  0.20250  0.04000  0.18000  0.14000
```

となった．最初の世代で O 型の割合は 3 割であったが，次の世代で 2 割ほどに急減し，以下その割合は変わらない．これは実際の分布と異なる．そこで，AA と AO の人数の比率，BB と BO の人数の比率を 1:4 と仮定し，$\boldsymbol{d} = [\,0.08, 0.32, 0.30, 0.04, 0.16, 0.10\,]^{\mathrm{T}}$ とおいて計算を進める．計算結果は

```
 0:  0.08000  0.32000  0.30000  0.04000  0.16000  0.10000
 1:  0.08410  0.31320  0.29160  0.02890  0.18360  0.09860
 2:  0.08410  0.31320  0.29160  0.02890  0.18360  0.09860
 3:  0.08410  0.31320  0.29160  0.02890  0.18360  0.09860
```

となり，実際に近い分布を得ることができた．