

数学解析 III 試験

1. 長さ L の梁の上端と下端を固定する. 梁の断面積 A , ヤング率 E , 線密度 ρ は一定である. 梁は重力により変形する. 梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す. このとき, $u(x)$ は

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L \rho Ag u(x) dx \\ \text{subject to} \quad & u(0) = 0, \\ & u(L) = 0 \end{aligned}$$

から求めることができる. 区間 $[0, L]$ を 6 分割し, 有限要素法を用いて, 上式を連立方程式に変換せよ.

2. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \\ -4 & -5 & 9 \end{bmatrix}$$

の LU 分解を求めよ.

3. 複素数 $w = e^{-i2\pi/8}$ に対して, 行列

$$F_8 = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \cdots & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & \cdots & w^7 \\ w^0 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{14} \\ \cdots & & & & \\ w^0 & w^7 & w^{14} & \cdots & w^{49} \end{bmatrix}$$

を定義する. このとき

$$F_8^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & \cdots & w^0 \\ w^0 & w^{-1} & w^{-2} & \cdots & w^{-7} \\ w^0 & w^{-2} & w^{-4} & \cdots & w^{-14} \\ \cdots & & & & \\ w^0 & w^{-7} & w^{-14} & \cdots & w^{-49} \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

4. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して, 射影行列 $A(A^T A)^{-1} A^T$ を求めよ.