

数値計算 小テスト 1,2 時限

1. 以下の文が正しい場合は○, 誤っている場合は×を記せ. (1点×5=5点)

- (a) 有限要素法における剛性行列 K は正則である.
- (b) 一次元のビームの動的な伸縮変形に関する運動エネルギーを, 有限要素法で近似する. このとき運動エネルギーは, 節点の変位から成るベクトルの時間微分 $\dot{\mathbf{u}}_N$ の二次形式で表される.
- (c) 射影行列 P に対して, $P^2 = P$ が成り立つ.
- (d) QR 分解において, 行列 R は上三角行列である.
- (e) 両端が固定されているビームの動的な変形を定式化する. ビームの運動エネルギーを T , 弾性ポテンシャルエネルギーを U , 外力の成す仕事を W , 左端の制約を R_1 , 右端の制約を R_2 で表すと, ラグランジアンは未定乗数 λ_1, λ_2 を用いて

$$L = T - U + W + \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$$

と表される.

2. 関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ は, 区間 $[0, 1]$ で定義され

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, & \phi_1(x) &= -2x^3 + 3x^2, \\ \psi_0(x) &= x^3 - 2x^2 + x, & \psi_1(x) &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

で与えられる. 以下の問いに答えよ. (2点×3=6点)

- (a) 区間 $[3, 4]$ で $f(3) = f_3, f(4) = f_4, f'(3) = d_3, f'(4) = d_4$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を, 関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_3, f_4, d_3, d_4 を用いて表せ.
- (b) 区間 $[0, 5]$ で $f(0) = f_0, f(5) = f_5, f'(0) = d_0, f'(5) = d_5$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を, 関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_0, f_5, d_0, d_5 を用いて表せ.
- (c) 区間 $[3, 8]$ で $f(3) = f_3, f(8) = f_8, f'(3) = d_3, f'(8) = d_8$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を, 関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_3, f_8, d_3, d_8 を用いて表せ.

3. 以下の行列の射影行列を求めよ. (4点)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

4. 三個の三角形 $\triangle P_0 P_1 P_3, \triangle P_4 P_3 P_1, \triangle P_1 P_2 P_4$ から構成される平面物体の弾性変形を定式化する. ラメの定数 λ に関する部分接続行列が

$$J_\lambda^{0,1,3} = J_\lambda^{4,3,1} = J_\lambda^{1,2,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

で表されるとき, 接続行列 J_λ を求めよ. (5点)

数値計算 小テスト 3,4 時限

1. 以下の文が正しい場合は○, 誤っている場合は×を記せ. (1点×5=5点)

- (a) 有限要素法における慣性行列 M は正則である.
- (b) QR 分解において, 行列 Q は直交行列である.
- (c) 一次元のビームの動的な伸縮変形に関する運動エネルギーを, 有限要素法で近似する. このとき運動エネルギーは, 節点の変位から成るベクトル \mathbf{u}_N の二次形式で表される.
- (d) 両端が固定されているビームの動的な変形を定式化する. ビームの運動エネルギーを T , 弾性ポテンシャルエネルギーを U , 外力の成す仕事を W , 左端の制約を R_1 , 右端の制約を R_2 で表すと, ラグランジアンは未定乗数 λ を用いて

$$L = T - U + W + \lambda R_1 + \lambda R_2$$

と表される.

- (e) 射影行列 P に対して, $P^{-1} = P$ が成り立つ.

2. 以下の行列の射影行列を求めよ. (4点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ は, 区間 $[0, 1]$ で定義され

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1, & \phi_1(x) &= -2x^3 + 3x^2, \\ \psi_0(x) &= x^3 - 2x^2 + x, & \psi_1(x) &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

で与えられる. 以下の問いに答えよ. (2点×3=6点)

- (a) 区間 $[2, 3]$ で $f(2) = f_2, f(3) = f_3, f'(2) = d_2, f'(3) = d_3$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を, 関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_2, f_3, d_2, d_3 を用いて表せ.
- (b) 区間 $[0, 5]$ で $f(0) = f_0, f(5) = f_5, f'(0) = d_0, f'(5) = d_5$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を, 関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_0, f_5, d_0, d_5 を用いて表せ.
- (c) 区間 $[2, 7]$ で $f(2) = f_2, f(7) = f_7, f'(2) = d_2, f'(7) = d_7$ を満たすスプライン補間 $f(x)$ を, 関数 $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$ と f_2, f_7, d_2, d_7 を用いて表せ.

4. 三個の三角形 $\triangle P_0P_1P_2, \triangle P_3P_2P_1, \triangle P_2P_3P_4$ から構成される平面物体の弾性変形を定式化する. ラメの定数 λ に関する部分接続行列が

$$J_\lambda^{0,1,2} = J_\lambda^{3,2,1} = J_\lambda^{2,3,4} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

で表されるとき, 接続行列 J_λ を求めよ. (5点)