

数値計算 試験

1. ピボット選択型 LU 分解を用いて, 5 次の正方行列

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

の LU 分解を, 4 次の正方行列 A_4 の LU 分解に変換する. 行列 A_5 の一列目でピボットを選び, それにしたがって行を交換した結果を行列 A'_5 で表す. 行列 A'_5 の LU 分解 $A'_5 = L_5 U_5$ において, L_5 の対角要素の値を 1 とする. 以下の問いに答えよ. (12 点)

- (a) 行交換後の行列 A'_5 を示せ.
- (b) 下三角行列 L_5 の一列目を示せ.
- (c) 上三角行列 U_5 の一行目を示せ.
- (d) 4 次の正方行列 A_4 を示せ.

2. 質量 m の質点が水平面 $O - xy$ 内を運動する. ただし, 質点の運動は, 曲線 $ax^2 + by^2 - 1 = 0$ (a, b は正の定数) 上に制約されている. 制約力の大きさを λ で表すと, 質点の運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda(2ax) \\ m\ddot{y} &= \lambda(2by) \end{aligned}$$

で与えられる. 以下の問いに答えよ. (10 点)

- (a) 制約安定化法を用いて, この制約付き微分方程式を標準形に変換せよ.
- (b) 標準形における状態変数を示せ.
- (c) 状態変数の値から状態変数の時間微分の値を計算する過程を示せ.

3. 以下の文が正しいか否かを判定し, 誤っている場合は反例 (文が成り立たない例) を示せ. (8 点)

- (a) 対角要素がすべて正である 3×3 の対称行列はコレスキー分解できる.
- (b) 変数 x とその時間微分 \dot{x} のみを含む式は, 微分方程式の標準形である.
- (c) $w = e^{-i2\pi/8}$ とする. 0 以外の任意の整数 k に対して

$$w^0 + w^k + w^{2k} + \cdots + w^{6k} + w^{7k} = 0$$

が成り立つ.

- (d) 零行列以外の 2×2 行列の射影行列は, 2 次の単位行列である.

4. 次の行列の射影行列を求めよ。(10点)

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 観測値 $g_0, g_1, g_2, \dots, g_7$ の高速フーリエ変換 $G_0, G_1, G_2, \dots, G_7$ を計算する回路を図示せよ。(10点)

6. 長さ L の梁の上端と下端を固定する。梁の断面積 A , ヤング率 E , 線密度 ρ は一定である。梁は重力により変形する。重力加速度を g で表す。梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す。このとき関数 $u(x)$ は

$$\begin{aligned} \min \quad & \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L \{-\rho Ag u(x)\} dx \\ \text{subject to} \quad & u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{aligned}$$

から求めることができる。区間 $[0, L]$ を4分割し、有限要素法を用いて、上式を連立方程式に変換せよ。(10点)