応用数学 III　試験

1．長さ L の梁の上端と下端を固定する．梁の断面積 A，ヤング率 E，線密度 ρ は一定である．梁は重力により変形する．重力加速度を g で表す．梁の自然状態において上端から距離 x の点における点の変位を $u(x)$ で表す．このとき関数 $u(x)$ は

$$\begin{aligned} &\min && \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^L \{-\rho A g\, u(x)\} \,\mathrm{d}x \\ &\text{subject to} && u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{aligned}$$

から求めることができる．区間 $[0, L]$ を 6 分割し，有限要素法を用いて，上式を連立方程式に変換せよ．

2．水平面内を質点が運動する．質点の座標を (x, y) で表す．質点の位置が曲線

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} - \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2b$$
$$(a,\, b \text{ は正の定数．} -a < b < a)$$

上に制約される．制約安定化の式を x，y，$v_x \triangleq \dot{x}$，$v_y \triangleq \dot{y}$ を用いて表せ．

3．$w = e^{-i\,2\pi/8}$ とする．整数 k に対して

$$w^0 + w^k + w^{2k} + w^{3k} + \cdots + w^{6k} + w^{7k} = \begin{cases} 8 & (k \bmod 8 = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (k \bmod 8 \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つことを示せ．ここで $k \bmod 8$ は k を 8 で割った余りを表す．

4．行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

の QR 分解を求めよ．