乱数 random.c

関数 double drand48() は，区間 $[0,1)$ の一様乱数 $U(0,1)$ を生成する．関数 void srand48(long) は，引数を種として乱数を初期化する．

一様乱数 $U(a,b)$

一様乱数 $U(0,1)$ に従う確率変数を X，一様乱数 $U(a,b)$ に従う確率変数を Y とする．変数 X と Y の関係は，次式で与えられる．

$$Y = (b-a)X + a. \tag{1}$$

したがって，(1) 式を用いて変数 X から変数 Y を計算することにより，一様乱数 $U(0,1)$ に従う確率変数から一様乱数 $U(a,b)$ に従う確率変数を求めることができる．

```
extern double uniformrand(double a, double b)
```

`a`	:	区間下限
`b`	:	区間上限

確率変数 X が区間 $[\alpha,\beta]$ に含まれる確率を，$Pr(\alpha \le X \le \beta)$ と書く．確率 $Pr(\alpha \le X \le \beta)$ を

$$\int_\alpha^\beta n(x)\ dx$$

と書くことができるとき，関数 $n(x)$ を確率密度関数とよぶ．たとえば，一様乱数 $U(0,1)$ の確率密度関数は，

$$n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (1 < x) \end{cases}$$

である．実際，変数 X が一様分布 $U(0,1)$ に従うとき

$$Pr(X \le \frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} n(x)\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1\ dx = \frac{1}{2}$$
$$Pr(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 1\ dx = \frac{1}{4}$$

が得られる．また，一様乱数 $U(a,b)$ の確率密度関数は，

$$n(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ 1/(b-a) & (a \le x \le b) \\ 0 & (b < x) \end{cases}$$

である．

確率変数 X に関する式 $f(X)$ の平均は，

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)n(x)\,dx \tag{2}$$

で与えられる．記号 E を，平均オペレータとよぶ．確率変数 X の平均を μ，分散を σ^2 とすると，

$$\begin{aligned} \mu &= E[X] \quad (3) \\ \sigma^2 &= E[(X-\mu)^2] \quad (4) \end{aligned}$$

と書くことができる．

例　確率変数 X が，一様分布 $U(0,1)$ に従う．このとき

$$\mu = E[X] = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$$
$$\sigma^2 = E[(X-\frac{1}{2})^2] = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 \cdot 1\,dx = \frac{1}{12}$$

したがって，一様分布 $U(0,1)$ の平均は 1/2，分散は 1/12 である．

正規乱数 $N(0,1)$

平均 0，分散 1 の正規分布乱数とは，確率密度が次式で与えられる変数である．

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

確率密度が与えられているので，一様乱数 $U(0,1)$ を正規乱数 $N(0,1)$ に変換する変換式を導くことができる．ただし，変換式は指数関数を含み，計算量が大きい．そこで，一般的には，中心極限定理を用いた変換法を用いる．

中心極限定理　確率変数 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ は，平均 μ，分散 σ^2 の任意の確率変数であるとする．さらに，これらの変数は，互いに無相関であるとする．変数の個数 n が十分に大きいとき，確率変数の和

$$X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$$

は，正規分布に従う．

確率変数の和 $X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1}$ の平均と分散を求める．変数 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ の平均は μ であるので，

$$E[X_0] = E[X_1] = \cdots = E[X_{n-1}] = \mu.$$

したがって，和 $X_0+X_1+\cdots+X_{n-1}$ の平均は,

$$\begin{aligned} & E[X_0+X_1+\cdots+X_{n-1}] \\ = & E[X_0]+E[X_1]+\cdots+E[X_{n-1}] \\ = & n\mu \end{aligned}$$

である．変数 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ の分散は σ^2 であるので,

$$E[(X_0-\mu)^2]=E[(X_1-\mu)^2]=\cdots=E[(X_{n-1}-\mu)^2]=\sigma^2.$$

変数 X_0 と X_1 は無相関なので,

$$E[(X_0-\mu)(X_1-\mu)]=E[(X_0-\mu)]E[(X_1-\mu)]=0.$$

同様にして

$$E[(X_i-\mu)(X_j-\mu)]=0, \quad \text{for all} \quad i\neq j.$$

したがって，和 $X_0+X_1+\cdots+X_{n-1}$ の分散は,

$$\begin{aligned} & E[(X_0+X_1+\cdots+X_{n-1}-n\mu)^2] \\ = & E[\{(X_0-\mu)+(X_1-\mu)+\cdots+(X_{n-1}-\mu)\}^2] \\ = & E[(X_0-\mu)^2]+E[(X_1-\mu)^2]+\cdots+E[(X_{n-1}-\mu)^2]+ \\ & 2E[(X_0-\mu)(X_1-\mu)]+2E[(X_0-\mu)(X_2-\mu)]+ \\ & \cdots+2E[(X_{n-2}-\mu)(X_{n-1}-\mu)] \\ = & n\sigma^2 \end{aligned}$$

である．結局，和 $X_0+X_1+\cdots+X_{n-1}$ は，平均 $n\mu$，分散 $n\sigma^2$ の正規分布に従うことがわかる．

$$X_0+X_1+\cdots+X_{n-1} \sim N(n\mu, n\sigma^2) \tag{5}$$

中心極限定理を用いて，正規乱数を生成する．確率変数 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$ は，一様分布 $U(0,1)$ に従うとする．一様分布 $U(0,1)$ の平均は $1/2$，分散は $1/12$ であるので,

$$X_0+X_1+\cdots+X_{n-1} \sim N(\frac{n}{2}, \frac{n}{12}).$$

両辺より，和の平均 $n/2$ を引くと,

$$X_0+X_1+\cdots+X_{n-1}-\frac{n}{2} \sim N(0, \frac{n}{12}).$$

ここで，$n = 12$ とおくと

$$X_0 + X_1 + \cdots + X_{11} - 6 \sim N(0,1).$$

したがって，12 個の一様乱数を加算し，6 を減算すると，平均 0，分散 1 の正規乱数 $N(0,1)$ を生成することができる．

```
extern double nrand(void)
{
        double  sum, f;
        int  k;

        sum = 0.00;
        for (k=0; k<12; k++) {
                f = drand48();     /* 一様乱数 U(0,1) */
                sum += f;
        }
        sum -= 6;

        return sum;
}
```

正規乱数 $U(\mu, \sigma^2)$

正規乱数 $U(0,1)$ に従う確率変数を X，正規乱数 $U(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数を Y とする．変数 X と Y の関係は，次式で与えられる．

$$Y = \sigma X + \mu. \tag{6}$$

確認のため，変数 Y の平均と分散を計算する．変数 X の平均は 0，分散は 1 であるので，$E[X] = 0$，$E[X^2] = 1$ が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[\sigma X + \mu] = \sigma E[X] + \mu = \mu, \\ E[(Y-\mu)^2] &= E[(\sigma X)^2] = \sigma^2 E[X^2] = \sigma^2 \end{aligned}$$

が得られ，変数 Y の平均が μ，分散が σ^2 であることがわかる．結局，(6) 式を用いて変数 X から変数 Y を計算することにより，正規乱数 $N(0,1)$ に従う確率変数から正規乱数 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数を求めることができる．

```
extern double normalrand(double mu, double var)
    mu      :  正規分布の平均
    var     :  正規分布の分散
```